

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI
MEMORIE DELL'ACCADEMIA
DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

ORIZZONTI MATEMATICI

TRA DIDATTICA E DIVULGAZIONE

a cura di

Salvatore Cuomo - Salvatore Rionero - Carlo Sbordone



GIANNINI
EDITORE

© 2016 Giannini Editore
ISBN 978-88-7431-857-5

Giannini Editore
Via Cisterna dell'Olio 6/B - 80134 Napoli
www.gianninieditore.it

Questa pubblicazione è stata realizzata con il contributo di

Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Regione Campania

Istituto Banco di Napoli Fondazione

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

Orizzonti Matematica

Un ponte tra la didattica e la divulgazione

Prefazione

Lo sviluppo armonico di una società che contempli la valorizzazione delle conoscenze derivanti dalle Scienze e dalla Tecnologia si basa sulla comprensione delle informazioni scientifiche e del loro impatto sulla quotidianità e sui modelli di vita.

L'educazione a un corretto atteggiamento verso le Scienze Matematiche avviene soprattutto durante la Scuola e, nella Scuola, attraverso una efficace valorizzazione delle professionalità degli insegnanti anche attraverso l'incentivazione del lavoro collaborativo e costruttivo degli studenti, soggetti attivi della loro formazione. Questo volume raccoglie alcuni contributi raccolti nelle attività del progetto Orizzonti Matematici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" (DMA) dell'Università degli Studi di Napoli Federico II. Tale progetto ha tra i propri obiettivi quello di promuovere un percorso basato sul binomio esplorazione-argomentazione, utilizzando le metodologie proprie di un laboratorio di matematica, inteso non solo come luogo fisico fatto di aule e strutture attrezzate di spazi per l'apprendimento, ma soprattutto come momento in cui lo studente, guidato dal docente, attraverso lavoro di gruppo ed il Cooperative Learning, impari a progettare e condurre osservazioni sperimentali sugli oggetti. L'obiettivo è quello di sapere interpretare risultati, formulare semplici previsioni e congetture ed avviarsi all'argomentazione logica, basata prima sulla concentrazione e successivamente sulla discussione proficua con i compagni e con i docenti.

Nella presente opera contenuti di alta valenza didattica e discussioni di natura scientifica sono trattate al fine di fornire al lettore uno strumento per la riflessione e l'approfondimento di tematiche che riguardano le Scienze Matematiche in contesti relativi all'insegnamento e alla divulgazione.

Gli autori

Salvatore Cuomo

Salvatore Rionero

Carlo Sbordone

Le attività di terza missione

Il Dipartimento di Matematica e Applicazioni (DMA) “R. Caccioppoli” da numerosi anni é impegnato nelle attività di terza missione. Tale compito istituzionale prevede l’apertura del Dipartimento verso il contesto socio-economico mediante la valorizzazione e il trasferimento delle conoscenze. In tale contesto il DMA ha partecipato con successo a numerose iniziative di carattere culturale e di divulgazione scientifica. Tra queste ad esempio l’iniziativa *Laboratori per le Hard Science, ovvero avvicinare i cittadini e i nativi digitali alle Scienze Matematiche, alla Biologia ed alla Chimica* nell’ambito di diverse edizioni della manifestazione Futuro Remoto. Il DMA, inoltre, prende parte alle attività del Piano Lauree Scientifiche (PLS) nel campo della Matematica e Statistica sin dalla sua istituzione risalente al 2005. PLS rappresenta il principale programma di orientamento universitario in ambito scientifico operante in Italia, rivolto a studenti iscritti agli ultimi anni delle scuole superiori. Le attività svolte in ambito PLS sono frutto di una stretta collaborazione tra numerose scuole del territorio e l’Ateneo federiciano. Attraverso PLS, il Dipartimento coinvolge ogni anno circa 300 studenti di oltre 20 istituti superiori della provincia di Napoli in percorsi laboratoriali di 20 ore finalizzati a presentare temi e metodologie proprie della matematica; tali percorsi sfociano poi in una manifestazione aperta dove gli studenti presentano lavori svolti in autonomia. Numerosi docenti del Dipartimento, infine, collaborano con associazioni di insegnanti e i docenti della scuola italiana di ogni ordine e grado al fine di innovare la didattica trasferendo la loro esperienza universitaria e di ricerca.

Il direttore del DMA
Gioconda Moscariello

Indice

Loredana Biacino	<i>Qualche considerazione sulle prove OCSE-PISA-MATEMATICA Lavoro eseguito nell'ambito del progetto Orizzonti matematici</i>	11
Barbara Brandolini, Guido Trombetti	<i>Con la Matematica si può anche giocare</i>	35
Aniello Buonocore, Luigia Caputo	<i>Insegnamento-Apprendimento della Probabilità: Schema di Bernoulli e Metodo Monte Carlo</i>	63
Francesco de Giovanni	<i>Georg Cantor e il caso del cardinale assassinato: un delitto contabilmente riconoscibile</i>	64
Margherita Guida, Carlo Sbordone	<i>Sull'insegnamento delle frazioni nella scuola secondaria</i>	105
Serafina Pianese, Piera Romano	<i>Il grafico della funzione quadratica: artefatto matematico per lo studio delle equazioni e disequazioni di II grado al biennio del Liceo Scientifico</i>	127
Salvatore Rionero	<i>Dalla mela di Newton alle onde gravitazionali: uno sguardo sulla Scienza Moderna dalla nascita a tutt'oggi</i>	151

QUALCHE CONSIDERAZIONE SULLE PROVE OCSE-PISA-MATEMATICA

Lavoro eseguito nell'ambito del progetto Orizzonti matematici

Loredana Biacino

1. Introduzione

Le prove OCSE-PISA Matematica 2003 qui prese in considerazione rappresentano un'opportunità per ripensare e discutere sull'insegnamento della matematica nelle scuole, soprattutto tenendo conto della necessità che esso vada evolvendosi così come radicalmente e velocemente si sta evolvendo la società. Esse rappresentano di fatto un effettivo interlocutore che formula chiaramente le sue proposte: è evidente che ogni insegnante può modulare la sua risposta individuale a seconda delle sue idee e della sua formazione, ma non può non tenerne conto.

Scopo della prova è verificare quanto i ragazzi siano idonei a risolvere problemi in ambiti non strettamente previsti dai programmi scolastici, la cui risoluzione ha a che fare a volte col buon senso, a volte con l'intuizione, a volte con nozioni elementari, ma spesso calate in situazioni inusuali per i ragazzi. Si tratta di saggiare una capacità di utilizzare esperienze e conoscenze, e forse più abilità che conoscenze (dove per abilità deve intendersi una conoscenza che è diventata pratica di vita), di cui si vorrebbe che gli studenti fossero in possesso, per affrontare situazioni problematiche quali quelle che potrebbero presentarsi nella vita reale.

Ora si vorrebbe che quella abilità si fosse costituita in precedenza: il nostro compito di educatori consiste appunto nel creare i presupposti per cui tali capacità di inquadrare le proprie conoscenze in un campo tanto vasto che possa comprendere nuovi stimoli ed eventualmente spunti provenienti dal mondo extramatematico possano emergere e consolidarsi.

Come ottenere ciò? Ci sono ovviamente molti modi ed ogni insegnante potrà portare la propria esperienza e il proprio contributo. Un possibile inquadramento del problema consiste nell'individuare in alcune delle prove precedentemente assegnate quanto possa giocare l'intuizione e quanto invece sia strettamente legato ad una precedente presa di consapevolezza su alcuni temi fondamentali e quindi sia legato ad argomenti già trattati e studiati (ma, come mostrano i risultati, spesso non assimilati in modo effettivo e fecondo, ma, al più, formale).

A tal fine può essere molto utile tenere presente, una volta che si sia preso atto della natura delle prove assegnate, spesso consistenti in problemi presi dalla vita reale e dall'esperienza quotidiana dei ragazzi, quali suggerimenti se ne possano trarre circa i contenuti, quali sono gli argomenti trattati e con quali modalità: ad esempio può essere interessante osservare che solo 5 delle 25 prove rilasciate di Matematica del 2003 è a risposta multipla, invece spesso è richiesta motivazione dei risultati ottenuti, a volte anche in più modi; e bisogna anche sottolineare i criteri attenti con cui si richiede di correggere le prove, predisposti relativamente agli obiettivi da raggiungere.

È un nuovo modo di procedere che viene additato agli insegnanti di matematica. Ovviamente con la speranza che non si irrigidiscano in un addestramento o in un nuovo tipo di tecnicismi, ma tengano sempre presente che lo scopo reale di ogni intervento educativo deve essere la formazione della persona. Infatti avere una buona capacità di indagare matematicamente la realtà dovrebbe avere come corollario anche la capacità di analizzare i propri sentimenti e tenere in mano saldamente e liberamente le redini della propria vita, senza farsi trasportare dagli eventi, capacità che più di tutte è importante per i nostri giovani.

2. Alcune delle possibili aree di intervento

Si possono raggruppare i diversi quesiti che sono simili allo scopo di inquadrarli in un ambito di discorso più generale, teorico, ma con attenzione alle possibili interpretazioni e applicazioni, che si suppone o sia già stato trattato e quindi ci si può limitare ad esemplificazioni e a risoluzione di situazioni problematiche, o sia da trattare ex novo: questo deve deciderlo il docente della classe.

- 1- L'interpretazione e la rappresentazione grafica di situazioni o dati, la raccolta e la resa grafica di informazioni.
- 2- La nozione di funzione. Per i punti 1 e 2 si può far riferimento alle prove Lago Ciad, La crescita, Esportazioni, Rifiuti, Velocità di un'auto da corsa, L'automobile migliore, etc...
- 3- Il movimento, moti uniformi, velocità media, unità delle misure: misura delle lunghezze e del tempo, problemi di conversione, rappresentazione grafica della velocità e sua interpretazione. Per questo punto si può far riferimento alle prove Andatura, Velocità di un'auto da corsa, etc...
- 4- Numeri, naturali, interi, razionali, reali: confronto e rappresentazione sulla retta, rappresentazione dei punti del piano mediante un sistema di coordinate cartesiane etc.. (Dadi, Meli, Motivi a scaletta, Scala, etc..).

- 5- Proprietà geometriche delle figure: criteri di eguaglianza e di similitudine, misura delle aree etc..(Dadi da gioco, Carpentiere, Area di un continente, Triangoli, etc...)
- 6- Probabilità e statistica: rappresentazione di dati mediante istogrammi e grafici, valutazione probabilistica di eventi (Caramelle colorate, Verifica di Scienze, Rifiuti, Terremoti, Scelte, Popolarità del presidente).

3. Interpretazione e rappresentazione grafica di situazioni e dati, funzioni, attraverso uno sguardo alle prove assegnate

Cominciamo con l'analizzare e trarre suggerimenti da Lago Ciad, una delle prove rilasciate di lettura diversamente da tutte le altre qui prese in considerazione. La spiegazione degli obiettivi che si prefigge è resa nel testo proposto per gli insegnanti; si tratta di:

- integrare le informazioni di un testo e di un grafico accluso;
- individuare semplicemente informazioni che il testo contiene in forma esplicita;
- integrare le informazioni che provengono da due diverse figure.

Si tratta pertanto di un esercizio che richiede, oltre la comprensione letterale del testo, di carattere non matematico, l'interpretazione, più che quantitativa, qualitativa, di un grafico e l'interpretazione di uno schema che non è un grafico, ma una tabella: è chiesto quindi di ricavare informazioni che provengono dal confronto del testo e dal grafico e dal confronto del grafico e la tabella.

Ora in molti libri di testo si procede (come avviene un po' nella pratica) studiando e producendo grafici senza aver prima parlato della nozione di funzione: ovviamente si suppone nota la rappresentazione dei numeri reali sulla retta e la rappresentazione cartesiana dei punti del piano. Il sistema di riferimento che poi si usa non è quasi mai monometrico, inoltre gli elementi di un asse a volte non sono nemmeno numeri, ma ad esempio, nomi di città, nomi di persone, etc..

Leggendo i giornali in classe, pratica molto utile e da raccomandare, accanto a grafici veri e propri troviamo spesso istogrammi ed areogrammi. Nella prova *Esportazioni* compare un areogramma accanto ad un istogramma: nell'istogramma sono descritte le esportazioni, in milioni di zed, avvenute in determinati anni, l'areogramma riporta invece in percentuale le merci esportate da Zedlandia in uno degli anni che compaiono nell'istogramma. Sono abbastanza ovvie le domande che si possono formulare al riguardo, ritenendo addirittura banali le

risposte. Eppure alla Domanda 2 della prova in questione, dove é richiesto il confronto tra le due rappresentazioni e il semplice calcolo di una percentuale, solo il 37,1% dei ragazzi italiani risponde correttamente rispetto a una media OCSE del 46,9%. Se i ragazzi sono coinvolti in uno studio di questo o un analogo problema, dopo aver insegnato loro a consultare tabelle e a calcolare facilmente percentuali, si può chiedere di costruire schemi simili che riguardino ad esempio l'Italia, ricavando le informazioni dall'insegnante di lettere, da un atlante geografico o telefonando a qualche giornale che si occupi di economia. Un lavoro di questo genere, oltre alla sua componente interdisciplinare, può essere molto interessante dal punto di vista matematico. Infatti una volta ottenuti i dati, si tratta di rappresentarli nel cerchio mediante settori: gli archi di tali settori debbono essere proporzionali ai dati. Ma le lunghezze degli archi sono proporzionali agli angoli al centro, e quindi 360° vanno ripartiti in parti proporzionali ai dati. Come si può ottenere ciò? Una via possibile consiste in una suddivisione del cerchio con l'aiuto di un goniometro...

Spesso si rappresentano i dati mediante punti isolati che poi vengono collegati con spezzate (grafici per spezzate): ad esempio si possono rappresentare le temperature di un malato in diverse ore del giorno, intervallate in generale da quattro ore, e per diversi giorni: congiungendo i punti del piano che si ottengono in questo modo con dei segmenti si può avere una spezzata che fornisce una chiara idea del decorso della malattia. Spesso poi invece di spezzate si usa collegare i vari punti con curve che presentino meno asperità. Se si è abituati a interpretare semplici grafici di questo tipo, l'interpretazione del grafico di Fig.1 di Lago Ciad non dovrebbe presentare difficoltà e le risposte a Domanda 2 e Domanda 3A dovrebbero essere immediate, contro una percentuale veramente bassa del 38,6% degli studenti italiani alla seconda di esse.

Troviamo due istogrammi raccolti in una sola figura in *Risultati di una verifica*, dove è richiesta, oltre che un'attenta lettura dei dati, una loro valutazione, che è del tutto extramatematica, ma fa riferimento ad un giudizio di carattere morale: è meglio che la maggior parte dei ragazzi ottenga la sufficienza, anziché un numero ristretto di ragazzi raggiunga vette elevate mentre un gran numero di loro é al di sotto della sufficienza? Si tratta di dare un giudizio che potrebbe essere trasportato anche ad altri campi, ad esempio in campo economico. Che ne pensano i ragazzi?

Le risposte al quesito mostrano una forte difficoltà, forse più nel leggere gli istogrammi e confrontarli che nella valutazione extramatematica, con una punta dell'8,8% al Sud (15,3% It, OCSE 31,3%).

Una semplice tabella compare poi in *L'automobile migliore*: è relativa a diversi tipi di auto nuove, con punteggi diversi da attribuirsi a diverse caratteristiche delle auto stesse (sicurezza, aspetto esteriore, etc...). Questi dati vanno usati per valutare un determinato tipo di auto con un punteggio complessivo che si costruisce a partire da una formula assegnata. Fin qui tutto bene, l'argomento è di gradimento dei ragazzi, sicuramente ne hanno sentito parlare in famiglia o se ne sono personalmente interessati, i punteggi sono molto alti (65,4% It., 56,2% Sud, 71,6% OCSE). Ma quando si passa alla Domanda 2 la situazione precipita: ed infatti si richiede addirittura di scrivere una formula, diversa dalla precedente, che permetta alla macchina già considerata nella prima domanda, di ottenere un punteggio superiore a tutte le altre. È un modo di guidare la fantasia dei ragazzi e di portarli a ragionare in modo un po' più astratto: prima si mostra loro come può essere fatta una regola, poi si chiede di inventarne un'altra, che però risponda al ben preciso requisito di massimizzare il punteggio. Ovviamente, è in gioco la creatività, i punteggi sono bassi (It. 16,6%, Sud 8,8%, OCSE 24,9%). Anche in *Skateboard* troviamo una situazione simile, ma più facilmente gestibile da parte dello studente: infatti Enrico in un negozio ha la possibilità di comprare uno skateboard già confezionato o può comprare separatamente i quattro pezzi che lo compongono: alcuni di tali pezzi si possono trovare a due prezzi diversi: Enrico possiede 120 zed e vuole comprarsi lo skateboard più costoso che può permettersi. Quanto può permettersi di spendere Enrico per ognuno dei quattro pezzi? Anche qui bisogna mettere in campo una capacità diversa da quella che in genere viene richiesta a scuola, ma, non essendo richiesto di scrivere una formula, il problema è più pratico, meno astratto del precedente e i risultati sono molto senz'altro migliori: Sud 32,5%; Italia 43,1%; OCSE 48,9%.

Nel quesito *La crescita* è proposto un grafico, costituito da due curve, in cui è rappresentata l'altezza media rispettivamente dei ragazzi e delle ragazze olandesi nel 1998, in riferimento alla loro età, che varia dai 10 ai 20 anni. È naturale porsi la seguente domanda: come è stato costruito tale grafico? si può pensare che si siano calcolate le medie dei ragazzi e separatamente delle ragazze olandesi (con qualche siste-

ma statistico) per gruppi di età ad esempio con intervalli di tre mesi e che tali dati siano poi stati collegati con una curva quanto più possibile morbida. Le curve che si presentano nella pratica sono quasi sempre ben diverse da quelle che si studiano in matematica, partendo da una loro formulazione analitica: spesso infatti nella pratica si tenta di fare il contrario, partendo da una serie di dati studiare se sia possibile ottenere una funzione già nota che li contempli. La Domanda 1 è molto semplice, richiede una semplice sottrazione. Ma già la Domanda 2, che presuppone solo la capacità di lettura del grafico, vede un forte calo delle risposte a punteggio pieno (35,1% contro una media OCSE del 53%). La risposta alla Domanda 3 (Spiega in che modo il grafico mostra che, in media, la crescita delle ragazze è più lenta dopo i 12 anni?) è invece più difficile in quanto presuppone che sia chiara la nozione di pendenza di una curva o in senso matematico o anche solo in senso intuitivo (infatti risponde correttamente solo il 28,9% degli italiani contro una media OCSE del 43,5%).

In questo caso, come in molti altri simili, ci si può porre il problema di approssimare i due grafici dati, ottenuti sperimentalmente, con i grafici di funzioni note, per una migliore descrizione del fenomeno. Ad esempio, in relazione al grafico che rappresenta l'altezza media dei ragazzi, possiamo considerare la retta che passa per i punti (10,142) e (20,185). Si ottiene $y=4,3x+99$. Si vede però che l'approssimazione tanto buona non è, in quanto ad esempio si ricava per $x=15$, $y=163,5$, mentre il grafico dato fornisce per $x=15$ il valore molto più alto di cm 174. Si può allora pensare di approssimare almeno una parte del grafico con una parabola. Si può ad esempio scegliere la parabola che passa per il punto (13, 160) e ha vertice nel punto (20, 185). Si verifica immediatamente che tale parabola deve avere equazione del tipo $y=a+185$, da cui imponendo il passaggio per (13, 160), si trae $a=-25/49$, che si può approssimare con $a=-1/2$. In tal modo, sostituendo si trae $y=-20x+15$, che fornisce una discreta soluzione del problema che ci siamo posti. Infatti, ponendo $x=15$ si ricava da tale equazione il valore della corrispondente altezza cm 172,5, abbastanza vicino al valore cm 174. Ancora, per $x=16$ si trova il valore accettabilissimo $y=177$.

La prova *Velocità di un'auto da corsa* è una delle poche prove a risposta multipla, metodo che, molto poco usato altrove, qui stranamente si ripete nelle varie domande: viene proposto un grafico che rappresenta la velocità variabile di un'auto da corsa mentre percorre il secondo giro

di un circuito pianeggiante lungo 3km., riferita alla distanza dalla linea di partenza. Presuppone quindi che si sappia che: poiché il circuito è pianeggiante le variazioni nella velocità sono da attribuirsi esclusivamente a curve, nei tratti rettilinei la velocità diventa costante e massima. Quindi dal grafico si trarrà, (sapendolo interpretare!) che ci sono tre curve e tre tratti rettilinei, non tutti della stessa lunghezza, la porzione di tratto rettilineo percorso all'inizio essendo molto corta. Però, contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, le percentuali delle risposte alle prime domande che richiedono di aver ben compreso come la velocità sia funzione della distanza dalla linea di partenza sono tutte molto più alte che nelle prove precedenti, con punte del 71,7% e del 77,4% per i ragazzi italiani. In questo caso infatti si possono fare le stesse considerazioni circa l'argomento fatte per *L'automobile migliore* e forse gioca anche un ruolo la possibilità di scegliere tra varie risposte. La percentuale di risposte corrette si abbassa però spaventosamente (14,6% media degli italiani con una punta del 9,8% al Sud contro la media OCSE del 28,1%) nell'ultima domanda dove è chiesto di dire a quale di 4 piste disegnate i ragazzi pensano che il grafico proposto risulti calzante. Questo è molto strano, perché a questo punto, a dispetto dei risultati precedenti, sembra che i ragazzi non siano entrati nel meccanismo della prova. Forse però gioca in modo negativo il fatto che tre figure siano un po' troppo simili e richiedano considerazioni abbastanza raffinate.

4. Interpretazione e rappresentazione grafica di situazioni e dati, funzioni: qualche definizione, problemi, domande, esercizi

Passiamo a formulare una serie di problemi e domande che, oltre a quelli proposti nelle prove cui si è accennato, possano aiutare i ragazzi ad impadronirsi in modo non formale delle nozioni di cui stiamo parlando. Innanzi tutto osserviamo che può essere utile avvicinarsi a un tale percorso portando gli studenti all'acquisizione del concetto di funzione con considerazioni fatte quasi per gioco: un esempio al riguardo è fornito dall'articolo di Maria Gabriella Sgueglia: *Un percorso didattico di insegnamento/apprendimento sul concetto di funzione*, Per. Mat. n.3, 2015, dove è esposto un cammino che partendo da semplici esperienze- un confronto tra scenette prese da strip e semplici grafici che possono essere ad esse accostati come una loro interpretazione- porta alla formalizzazione del discorso e alla sua interpretazione matematica.

Matematica e emotività, matematica e pubblicità. Se in un istogramma si pongono le voci cui i dati si riferiscono più vicini e si dilatano gli spazi relativi ai dati, pur conservando le relative proporzioni, si ottiene l'effetto di enfatizzare le differenze contenute nell'informazione. Ovviamente se si vuol fare passare sotto silenzio tali differenze si procede al contrario.

Problema 4.1. Nelle quattro città di Zed, Dan, Fri e Lir, che hanno approssimativamente lo stesso numero di abitanti, nell'ultimo anno sono avvenute rispettivamente 639, 831, 742 e 227 rapine. Tu vivi nella città di Dan: manda a un tuo caro amico una lettera che rappresenti il numero di rapine avvenute nell'ultimo anno nelle 4 città in modo da invogliarlo a farti visita. Se temi invece per lui (ti trovi in una zona particolarmente pericolosa) inviagli una lettera con un istogramma che lo dissuada dal farti visita.

Esercizio 4.2. Rappresentare con un istogramma la seguente situazione: nell'anno 2000 alla visita di leva si sono riscontrate le seguenti altezze (Dati presi dal testo di Villani-Gentili, *Matematica*, 2012)

Alt=h (in cm.)

$150 < h < 155$	2
$155 \leq h < 160$	4
$160 \leq h < 165$	16
$165 \leq h < 170$	40
$170 \leq h < 175$	63
$175 \leq h < 180$	47
$180 \leq h < 185$	20
$185 \leq h < 190$	6
$190 \leq h < 195$	0
$195 \leq h < 200$	2

Ovviamente si può costruire un simile istogramma partendo dai dati delle altezze degli studenti della classe o di più classi.

Problema 4.3. Supponiamo che le mele costino 1,5 euro al kg, l'uva costi 2,5 euro al kg, il prosciutto 20 euro al kg, descrivere come varia il costo di ciascuna di queste merci in relazione al peso, rappresentare graficamente tali variazioni, verificare che i grafici sono rette, che queste rette passano per l'origine, confrontarne la pendenza, scriverne l'e-

quazione generale, da questa dedurre il termine che dà informazioni sulla pendenza. Precisare le precedenti risposte osservando che in generale, come conseguenza delle nozioni sulla similitudine dei triangoli, il grafico dell'equazione $y=mx$ è una retta.

Si può forse a questo punto passare a un approccio più approfondito alla nozione di **funzione**, come legge di corrispondenza fra due insiemi, alla nozione di variabile indipendente e di variabile dipendente. Riprendiamo ad esempio il Lago Ciad: qual è la funzione rappresentata in figura? certo, per come è data, non è possibile descriverla con simboli matematici. Possiamo però notare che la variabile indipendente è il tempo t , varia nell'intervallo 9000 a.C., 2000 d.C. circa (che è per definizione il **dominio** della funzione, o **insieme di definizione**) e a ogni valore di t corrisponde un valore ben preciso della profondità del lago in quel tempo (desunto sicuramente con metodi extramatematici). Osservazione: nei test OCSE-PISA i sistemi di riferimento sono normalmente non monometrici! Il numero che esprime la profondità si dice **immagine** della t . L'insieme costituito da tutte le possibili immagini al variare della variabile indipendente nel suo insieme di definizione è detto **codominio**. La funzione è abbastanza varia, non si notano simmetrie, ripetizioni etc..., ma picchi e avvallamenti (che corrispondono a?); inoltre ovviamente (?) non assume valori negativi.

Molte delle attività che si svolgono quotidianamente sono regolate da funzioni. I ragazzi ricordano senz'altro il Problema 3.3 con il prezzo delle merci che dipende dalla quantità della merce comprata o venduta. Torniamo su quel caso: quel tipo di dipendenza la chiamiamo lineare. Tra le funzioni lineari rientra la funzione percentuale. Ad esempio se in un negozio si pratica lo sconto del 20% su un certo tipo di merce, questo vuol dire che se il prezzo di una merce di quel tipo era x allora quello che si paga effettivamente è $80/100 x$, cioè la funzione che stiamo considerando è $y=80/100 x$.

Domanda 4.4. Cosa vuol dire che i tagli della spending review non debbono essere lineari?

Domanda 4.5. Se un individuo ha bevuto in un giorno 1,5 litri d'acqua Levissima contenente 1,9 mg di sodio per litro, quanti grammi di sodio ha ingerito? Si ricorda che sono consigliati g 3,5=3500 mg. al giorno (dato desunto dal testo di Carlo e Francesco Sbordone, *Matematica per*

le Scienze della Vita, 2014). Ogni ragazzo può verificare quanto sodio ingerisce (con l'acqua minerale) controllando il quantitativo di sodio che contiene l'acqua che beve sull'etichetta della bottiglia. Più in generale è forse anche utile saper rispondere alla domanda: Quanto sodio contiene l'acqua del rubinetto? A chi si può chiedere?

Problema 4.6. Aumento dello stipendio di un lavoratore per effetto degli scatti di anzianità. Sia $S=S(0)$ lo stipendio base di un lavoratore, cioè lo stipendio all'atto dell'assunzione. Supponiamo che il contratto preveda uno scatto annuale dell'1,5% sullo stipendio base. Quale sarà lo stipendio dopo 10 anni?

Dopo il primo anno lo stipendio sarà $S(1)=S(0)+1,5S(0)= S(0)(1+1,5/100)$;

dopo il secondo anno $S(2)=S(1)+1,5S(0)=S(0)(1+2 \times 1,5/100)$

dopo n anni $S(n)=S(n-1)+1,5S(0)=S(0)(1+n \times 1,5/100)$.

Quindi dopo 10 anni lo stipendio sarà $S(10)=S(0)(1+1,5/10)=1,15S(0)$, e quindi, se ad es. $S(0)=2000$ euro, dopo 10 anni lo stipendio sarà 2300 euro.

L'espressione generale di una funzione lineare è $y=ax+b$. Tutte le funzioni lineari considerate finora sono particolari funzioni lineari, cioè funzioni del tipo $y=ax$. Nella forma generale notiamo che tutte le quantità ax , al variare di x , sono aumentate della quantità fissa b , quindi il diagramma in questo caso è ancora una retta, traslata della retta di equazione $y=ax$, che, se b non è 0, non passa per l'origine, ma per il punto $(0,b)$. Ad esempio il prezzo indicato sulla bolletta della luce è funzione lineare del consumo in kw/ore dell'elettricità, ma anche se il consumo è nullo si paga una quota fissa, sia b . L'importo y della bolletta è dato allora dal prezzo a di un kw/ore moltiplicato per il numero x dei kw/ore consumati più l'importo fisso b , cioè $y=ax+b$.

Così se l'importo fisso è di 10 euro e se ogni kw/ore costa 30 centesimi, allora, se ho consumato x kw/ore in un mese, la bolletta mensile sarà di y euro, dove $y=10+0,30x$.

Tutti i costi di cui stiamo parlando sono funzioni invertibili della quantità della merce presa in considerazione. Cosa significa questo? Se conosco il prezzo delle mele al kg (ad esempio euro 1,5) e so che ho speso 3 euro, so anche che ho comprato 2 kg di mele. Allo stesso modo se so che ho pagato 60 euro per la bolletta della luce, quanti kw/ore ho consumato? Basta considerare $70-10=60$ euro. $60\text{euro}=6000\text{cent.}$ e poi $6000:30=200$ kw/ore.

Una funzione invertibile è tale che comunque si assegni un valore alla x nel suo codominio si può determinare uno ed un solo valore della y che abbia quel valore assegnato della y come immagine. Non tutte le funzioni sono invertibili. Ad esempio consideriamo la funzione che ad ogni ragazzo della scuola associa la sua altezza in centimetri. Per avere una funzione è indispensabile che a ogni valore della variabile indipendente, in questo caso uno dei vari ragazzi della scuola, resti associato uno ed un solo valore, in questo caso la sua altezza. Ed è di questo tipo la situazione che stiamo analizzando. L'insieme dei ragazzi della scuola è il dominio della funzione, cioè l'insieme laddove essa si applica, i numeri in centimetri ad esempio da 150 a 200 che sono misure delle altezze dei ragazzi della scuola è il codominio. La corrispondenza assegnata è quindi una funzione, ma non è invertibile, perché non è detto che assegnato un numero del codominio, esso sia l'altezza di un solo ragazzo, ma potrebbe essere l'altezza di più ragazzi della scuola.

Consideriamo ora la funzione (della geometria) $A: r \rightarrow \pi r^2$ che fornisce l'area del cerchio in funzione del raggio r che va ovviamente supposto positivo o al più nullo. Quale è il dominio? Quale è il codominio? La funzione è invertibile perché ogni volta che è assegnato un numero positivo o nullo A , esiste un unico numero positivo o nullo che è il raggio del cerchio la cui area è data da A .

Invece la funzione che a ogni numero reale x associa il suo quadrato non è invertibile. Perché?

Consideriamo la funzione $T: h \rightarrow T(h)$ = temperatura di ebollizione dell'acqua all'altezza h sul livello del mare. Qual è il dominio?, Quale il codominio? Quanto vale $T(0)$?

Problema 4.7. Aumento di uno stipendio per effetto degli scatti di anzianità. Sia $S=S(0)$ lo stipendio base di un lavoratore; supponiamo che il contratto di lavoro preveda uno scatto di anzianità pari all'1,5% dell'anno precedente. A quanto ammonterà lo stipendio dopo 10 anni? Per il lavoratore è più conveniente questo contratto o quello previsto nell'Esercizio 3.6?

Dopo un anno lo stipendio sarà eguale a $S(1)=S+1,5\%S=S(1+1,5/100)$;
dopo due anni $S(2) = S(1) + 1,5\% S(1) = S(1)(1+1,5/100)=S(1+1,5/100)^2$;

dopo 3 anni $S(3)=S(2)+1,5\%S(2)=S(2)(1+1,5/100)=S(1+1,5/100)^3$;
quindi dopo 10 anni ... $S(10)=S(1+1,5/100)^{10}=(1,015)^{10}S=1,160S$.

Se ad es. $S=2000$, dopo 10 anni lo stipendio sarà di 2320 euro, quindi il secondo tipo di contratto è più conveniente per il lavoratore. Fatto interessante: il metodo che abbiamo usato serve pure per calcolare la crescita dopo dieci anni di un capitale investito al tasso fisso di interesse annuo $i=1,5\%$.

In generale la formula che fornisce quanto è cresciuto il capitale iniziale C dopo n anni che sia stato investito al tasso annuale fisso i è data da $C(n)=C(1+i)^n$. Sapresti spiegarla? (Questo e il precedente Problema 6 sono desunti dal testo Villani- Gentili, *Matematica, Comprendere e interpretare fenomeni delle scienze della vita*, 2012).

Esercizio 4.8. Secondo te x^2 cresce più o meno velocemente di $2x$, al variare di x ? Sapresti trovare una giustificazione di quanto affermi? La legge di proporzionalità inversa.

Esercizio 4.9. Dato un rettangolo di area fissa $K>0$, determinare come varia l'altezza y al variare della base x .

Deve risultare $xy=K$, quindi $y=K/x$. Sapresti interpretare graficamente questa corrispondenza?

5. Il movimento, moti uniformi, velocità media, unità delle misure

Cominciamo con il considerare la prova *Andatura*. Uno dei motivi della scelta è dato dal fatto che solo il 15,8% di studenti italiani risponde correttamente alla prima domanda, contro il 35,9% media OCSE, con una punta dell'11,6% per il Sud. Data la definizione di passo di un uomo che cammina, nella prova è fornita una formula, precisamente è dato come noto il fatto che il rapporto tra il numero di passi n al minuto di un individuo che cammina e la lunghezza p del suo passo in metri sia costante, eguale a 140, cioè $n/p=140$. La prima domanda è semplicissima ed è questa: se Enrico fa 70 passi al minuto, qual è la lunghezza del suo passo? Si richiede di eseguire i passaggi che portano alla risposta. Si tratta quindi di ricavare p dalla formula, conoscendo n . Qui probabilmente gioca fortemente la comprensione del testo, la formulazione essendo data in modo esplicito; ma anche il calcolo di p , che compare a denominatore, può forse essere risultato per alcuni un ostacolo insuperabile.

Se passiamo poi alla domanda successiva c'è un calo nelle risposte davvero sbalorditivo (2,1% di risposte valide per l'Italia, 1,2% per il Sud, contro una media OCSE del 7,9%). La domanda è questa:

Bernardo sa che la lunghezza del suo passo è di 0,80 metri. La formula viene applicata all'andatura di Bernardo. Calcola la velocità a cui cammina Bernardo esprimendola in metri al minuto e in chilometri all'ora. Scrivi i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

Si tratta innanzi tutto di calcolare i passi al minuto, ciò che si ottiene dalla formula: $n = p \times 140 = 0,80 \times 140 = 112$ passi al minuto. Una volta che siano noti il numero di passi al minuto e la lunghezza di tali passi in metri si dovrebbe ricavare immediatamente quanti metri fa Bernardo al minuto, e cioè la velocità espressa in metri al minuto: $112 \times 0,80 = 89,6 \text{ m/min}$; da qui si ricava moltiplicando per 60 numeratore e denominatore 5376 m/ora . Ma il quesito richiede che la velocità sia espressa in km/ora, quindi, convertendo i metri in chilometri, si ottiene il risultato finale $5,376 \text{ km/ora}$.

Il secondo quesito rispetto al primo richiede che per pervenire al risultato si debbano eseguire non una ma due operazioni, innanzi tutto calcolare il numero di passi al minuto che fa Bernardo, con le difficoltà di comprensione del testo che si è visto affiorano già dalla prima domanda, anche se in questo caso è più semplice ricavare il valore incognito. Solo in un secondo momento si può passare alla soluzione, per lo meno nella prima forma, tenendo presente come si passa dai m/min ai m/ora; una conversione analoga porta alla risoluzione anche del quesito che chiede di esprimere la velocità in km/ora.

Il secondo quesito, come abbiamo constatato, è più complicato del primo: spesso i quesiti che hanno maggior attinenza con la vita quotidiana presentano un grado più elevato di difficoltà: prendiamo ad esempio il quesito seguente dello stesso tipo di quelli ora analizzati.

Problema 5.1. Claudio ha un passo lungo m.0,40 e deve percorrere un tratto di strada lungo km1,2. Quanti passi farà al minuto? Quanti passi farà complessivamente? Quanto tempo impiegherà?

Qui la domanda che ha un valore pratico è la terza, ma porla senza aver prima fatto le precedenti richieste avrebbe forse comportato uno sforzo effettivamente un po' troppo grande. Quindi è stata preceduta da domande che in sé non rivestono un particolare significato pratico, ma sono di aiuto per la risoluzione del problema posto dalla terza domanda.

La difficoltà che presentano tali quesiti, e anche quello di natura abbastanza diversa e però superato in modo di gran lunga migliore, *Velocità di un'auto da corsa*, è la difficoltà concettuale degli strumenti teorici che ne sono alla base. Cos'è la velocità? Una distanza si vede, un tempo si afferra nel suo scorrere, ma la velocità è un rapporto, più complicato da cogliere teoricamente (ma non forse in modo intuitivo, fin da piccoli i bambini giocano con le macchinine e simulano la loro velocità, sviluppando una forma di sagacia a livello intuitivo). Già la velocità media presenta questa difficoltà, figuriamoci la velocità istantanea, che per la sua logica comprensione richiede l'appello a strumenti di carattere teorico decisamente superiore, l'infinitamente piccolo, il rapporto di infinitesimi... Molto allora nelle precedenti domande si affida all'intuito. Ancora un'osservazione: nei quesiti *Andatura* è data la legge $n/p=140$. Ora ci sono leggi tali che il volerne saggiare la validità è impossibile in un'aula o richiede uno sforzo davvero impegnativo. Ma questa legge è veramente semplice da verificare e potrebbe essere una conquista della classe, anziché una formula caduta dall'alto.

La prova offre lo spunto anche per una serie di riflessioni sul sistema decimale correntemente usato per misurare lunghezze, aree, volumi, pesi, capacità etc... Si può anche osservare che ci sono altri sistemi non decimali per compiere misurazioni analoghe, come quello anglosassone... Nella prova *Velocità di un'auto da corsa* sono rappresentati con molta cura i numeri da 0 a 3, con passo di $2/10$; questo può essere lo spunto per una riflessione sulla rappresentazione dei numeri sulla retta, ma anche per il confronto tra numeri razionali o tra reali; per eseguire operazioni coi razionali; per rappresentare i numeri ad esempio in base 2, etc...

Problema 5.2. Sapendo che la terra dista dal sole $1,5 \cdot 10^8$ e che la velocità della luce nel vuoto è di circa 300.000 km/sec, esprimi in ore, minuti, secondi il tempo che la luce del sole impiega per raggiungere la terra. (Ris. 8'20").

Problema 5.3. Un atleta corre i 200 metri in 19,8s. Calcolane la velocità media. Calcola la lunghezza del suo passo. (Ris. 10,1m/s e circa m.2,1).

6. Numeri e relazioni

Nella prova *Meli* un contadino pianta dei meli in modo da formare un quadrato e li protegge dal vento piantando delle conifere attorno ad essi. Segue lo schema utilizzato dall'agricoltore supponendo che i filari dei meli siano in numero di n con $n=1$ o $n=2$ o $n=3$ o $n=4$. La prima domanda, valutata di grado medio di difficoltà, chiede di completare una tabella riportando il numero dei meli e delle conifere per $n=1,2,3,4,5$. Per i casi con $n=1,2,3,4$ la risposta si ottiene semplicemente contando i puntini dello schema dato, quindi il problema consiste nell'immaginare come può essere costruito lo schema per $n=5$ e nel trarne una regola possibilmente, anche se ciò non è esplicitamente richiesto. Le risposte, come quasi sempre avviene, vedono una grande diversificazione tra nord e sud Italia, con Nord Est al 48,2% e Sud al 32,2% (media OCSE 49,2%). Nella seconda domanda sono fornite le formule che danno rispettivamente il numero di meli e il numero delle conifere per ogni fissato n e si richiede di determinare il valore di n per cui i meli sono tanti quante le conifere. Per studenti abituati a equazioni di primo e secondo grado dovrebbe essere una domanda semplice e invece solo il 20,8 degli studenti in Italia risponde correttamente (Sud 17,1%, OCSE 24,5% Nord Est 33,8%). Si passa poi alla terza domanda, di dichiarato elevato grado di difficoltà. Man mano che l'agricoltore ingrandisce il frutteto aumenta più velocemente il numero dei meli o delle conifere? Motivare la risposta. Si tratta di confrontare l'ordine di grandezza di n^2 e di $8n$: come fare? per induzione, aiutandosi con una calcolatrice? con un disegno dove evidenziare la relazione che intercorre tra i grafici delle funzioni $y=x^2$ e $y=8x$? risolvendo la disequaglianza $n^2 > 8n$? Ma questioni di questo tipo intervengono nello svolgimento delle lezioni in modo non astratto ma calate nella realtà? sono poi così importanti al biennio o possono essere rinviate ad anni successivi? Le risposte le otteniamo guardando la media veramente bassa di soluzioni corrette: Sud 1,5%; Italia 3,6; OCSE 7,9 (ma Nord Est 8,3%). Lo scopo di una simile domanda può forse essere quello di saggiare quanti ragazzi hanno una spiccata capacità di affrontare questioni nuove e di un elevato grado di difficoltà, sfruttando le conoscenze in loro possesso. Esistono, per fortuna, anche loro, e forse è bene non dimenticarne. Però questo non spiega la notevole differenza tra Sud e Nord Est e quindi fa capire che il problema è più complesso. Ad esempio si potrebbe osservare che

quando le statistiche sono state fatte il Nord Est era in piena fioritura economica... ma non solo.

Un semplice conto, fatto con un minimo di metodo, richiede *Libreria*, dove, con un certo arsenale di materiali, un operaio si chiede quante librerie potrà costruire, una volta fissate con precisione le quantità di ogni componente necessarie per una libreria. Come è da aspettarsi c'è una buona percentuale di risposte corrette, 50,6% al Sud; 55,3% Italia; 59,8% OCSE. Ma la percentuale è bassa se si tiene conto della semplicità della domanda e soprattutto del fatto che ragionamenti di questo tipo rientrano spesso nella vita dei ragazzi.

Nello stesso ordine di idee, ma con una struttura logica molto più semplice, rientra anche la prova *Scala*, dove è richiesto di stabilire l'altezza dei gradini di una scala, conoscendone il numero e conoscendo l'altezza complessiva della scala. Nonostante un elemento perturbatore, è data anche la profondità della scala, inessenziale per la soluzione del problema, il numero delle risposte esatte è elevato, oltre il 70% in tutte le sezioni.

In *Motivi a scaletta* un ragazzo, Roberto, costruisce una serie di scalette con dei quadrati, di cui sono forniti i primi tre passi: si chiede di determinare quanti quadrati dovrà usare per il passo successivo. Il quesito è semplice e risponde all'idea chiave dichiarata di quantità, ma ha anche una componente visiva, di natura geometrica molto forte. È vero che dello stesso quesito c'è anche la versione a albero capovolto, ma in quel caso il computo nei vari passi risulta forse più facile. Nonostante la semplicità votazioni abbastanza basse: 46,7% Sud; Italia 49,8%; OCSE 63,7%; Nord Est 60,7%.

Problema 6.1.

A quanto è eguale la somma di tutti i numeri della tavola pitagorica?

- a) 1000,
- b) 54;
- c) 3025.

Sapresti spiegare come sei pervenuto al risultato?

Problema 6.2 (trasformazione di formule)

È noto che la somma dei primi n numeri naturali è eguale a $n(n+1)/2$, cioè $1+2+3+4+\dots+n=n(n+1)/2$. Sapresti dire in base a tale formula a quanto è eguale la somma dei primi 1000 numeri naturali? Usando questa formula sapresti scrivere una formula che fornisca la somma dei pri-

mi n numeri pari, cioè sapresti dire a quanto è eguale $2+4+6+8+\dots+2n$? E, in maniera analoga, sapresti calcolare la somma dei primi n numeri dispari, cioè la somma $1+3+5+7+\dots+2n-1$?

7. Proprietà geometriche delle figure

Prendiamo in considerazione la prova *Carpentiere*. Vi si tratta di un carpentiere che ha a disposizione 32 metri di tavole di legno con cui vuole recintare il suo giardino: per il recinto prende in considerazione diversi progetti con forme diverse e le misure relative. Lo studente deve dire, caso per caso, se sia possibile recintare quella figura con le tavole a disposizione. Un'osservazione, che mi sembra naturale, è innanzi tutto relativa all'effettiva grandezza e forma del giardino, il testo avrebbe dovuto chiarire subito che le tre forme sono tutte compatibili con le dimensioni reali del giardino! Questa osservazione, che può apparire oziosa, mette in evidenza come sia effettivamente difficile proporre delle questioni di geometria pura (più che di aritmetica o di geometria analitica) che siano realmente analoghe ai problemi della vita di ogni giorno; perché nella realtà il problema principale per il carpentiere sarebbe di seguire quanto più possibile la forma del suo giardino, che quasi mai coincide con una figura geometrica tra quelle note allo studente, indipendentemente dalle tavole che ha a disposizione. Almeno che non si tratti di un'aiuola.

Per quanto le domande, in ognuno dei casi presentati, siano molto semplici anche da un punto di vista intuitivo, la percentuale delle risposte esatte a tutte e quattro è molto bassa: 19,5% media OCSE; 12,3% Italia; 10,5% Sud. Però, se si passa a 3 su 4 risposte corrette, mentre la media OCSE passa al 30%, il Sud passa al 27,1% quasi in media con l'Italia, al 27,9%. Per due delle figure in questione il fatto che abbiano lo stesso perimetro, lungo m.32, del rettangolo si può verificare usando semplicemente dei fiammiferi; l'equivalenza delle aree del rettangolo e del parallelogramma si verifica con carta e forbici, che in un triangolo rettangolo l'ipotenusa sia maggiore dei cateti è intuitivo. È ben vero che l'intuito può ingannarci (ci sono esempi al riguardo, forse è il caso qualche volta di proporre qualcuno), perciò si usano le dimostrazioni e i teoremi che su esse si basano, e c'è ad esempio un teorema che dice che in un triangolo ad angolo maggiore si oppone lato maggiore... Perciò, anche per l'equivalenza precedente, potremmo non fidarci com-

pletamente della nostra spiegazione con carta e forbici e ricorrere al criterio di eguaglianza dei triangoli.

È vero che le figure geometriche della realtà sono in generale molte di più e molto più complicate di quelle di cui può disporre uno studente del biennio, però quanto l'intuizione geometrica può aiutarci a capire e a ricordare formule matematiche! Ad esempio come si interpreta facilmente la regola del quadrato del binomio con una figura: se poi ne facciamo un modello di carta, possiamo dal quadrato di lato $a+b$ ritagliare i due quadrati di lato a e lato b e i due rettangoli uguali aventi le due dimensioni coincidenti con a e b ... Allo stesso modo si interpreta bene la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e volendo, ci si possono procurare dei cubi predisposti per l'interpretazione del cubo di un binomio etc...

Di natura diversa, con una accentuata attenzione al linguaggio, è il quesito *Triangoli*, dove sono proposte 5 figure di triangoli e la descrizione dettagliata di uno di essi. Il ragazzo deve individuare il triangolo descritto. È quindi un interessante problema che consiste nel cogliere la corrispondenza che il linguaggio stabilisce tra mondo mentale e una determinata situazione reale, di tipo geometrico. Richiede pertanto una attenta capacità di lettura e comprensione delle parole usate nella descrizione in un contesto che è abbastanza familiare ai ragazzi e la loro immediata interpretazione geometrica. I risultati non sono molto negativi, forse perché il quesito, valutato di media difficoltà, si colloca nell'ambito della routine scolastica (Sud 49,8%; Italia 54,8%; OCSE 55,3%).

Questo quesito offre lo spunto per un'attività didattica sul riconoscimento delle figure geometriche e sul linguaggio che si può mettere in pratica di quando in quando: proporre una figura geometrica ad un allievo e chiedergli di descriverla dettagliatamente ad un altro, che può ascoltare quello che il primo dice ma non vedere quello che lui vede, finché l'altro riesca a disegnarla a sua volta. Questa attività si rivela utile perché il ragazzo che vede e descrive si trova impegnato in una prova in cui deve ricercare le parole giuste che corrispondano esattamente alle proprietà geometriche della figura. Ma anche chi ascolta deve capire i termini usati e tradurli nel disegno.

Sempre nell'ambito dei programmi scolastici e sempre nell'ambito del riconoscimento di una figura geometrica si colloca *Fattorie*, dove il tetto di una fattoria si suppone sia stata rappresentata mediante un modello matematico costituito da una piramide retta a base quadrata.

Una percentuale alta (ma non altissima) di risposte corrette, tra il 52 e il 60% circa per Sud e Ocse con Italia al 58% circa, si ottiene alla prima domanda che richiede il calcolo dell'area di un quadrato di lato assegnato, il pavimento della soffitta, mentre la percentuale di risposte esatte alla seconda domanda, che richiede il calcolo di uno degli spigoli di un blocco che appare nel modello, si abbassa molto (Sud 33,2%; Italia 36%; OCSE 54,1%). Entra in questo caso in gioco la similitudine dei triangoli, argomento scolastico che dovrebbe essere familiare ai ragazzi. O, più semplicemente, il riconoscimento del fatto che i triangoli in questione sono tutti equilateri. Il risultato è scoraggiante, perché, anche nell'ambito dei programmi attualmente svolti, la maggior parte degli studenti non raggiunge la sufficienza, addirittura i due terzi al Sud, con difficoltà anche su una domanda di tipo elementare, quale l'area di un quadrato, cui quasi la metà degli studenti non sa rispondere. E non può essere una spiegazione sufficiente il fatto che la figura geometrica in questione, la piramide, sia stata immaginata come sostegno del tetto di una fattoria e che questo, invece di far volare la fantasia, abbia inibito la capacità di mettere in moto meccanismi di riconoscimento di proprietà matematiche che dovrebbero essere ben note.

Molto diversa dalle prove che generalmente si utilizzano con gli alunni è *Area di un continente*: in essa viene mostrata una cartina geografica dell'Antartide con relativa scala. Si richiede una stima dell'area dell'Antartide utilizzando l'annessa scala e la spiegazione del modo in cui tale stima è stata fatta; l'alunno può anche aiutarsi tracciando dei segni o dei disegni sulla carta. Le indicazioni per la correzione, che in tutte le prove sono molto accurate e a cui gli insegnanti dovrebbero ispirarsi per la valutazione dei compiti dei loro allievi, in questo caso sono veramente tante e molto articolate. È interessante la nota che si trova dopo la descrizione dei vari modi in cui la prova può essere valutata. In essa c'è la raccomandazione, nel caso di assenza di una soddisfacente spiegazione a parole, di andare a guardare i segni/disegni sulla carta geografica per cercare di individuare in quale modo lo studente è arrivato alla sua risposta. Infatti, è detto, lo scopo non è una verifica della capacità lessicale dello studente, ma della sua capacità di ragionamento. Non mi sembra che in Italia si utilizzino in generale prove a questo scopo, anche se la questione non è trascurata dagli insegnanti e quindi la prova ha un valore fortissimo di ricerca e di esperimento. Spesso si dice che se le parole non vengono sono anche i concetti che mancano,

cioè si tende ad assimilare il linguaggio con la effettiva comprensione, bollando in senso negativo la confusione delle parole o la loro assenza. Ora a livello intuitivo si possono avere conoscenze, magari confuse e incomplete, non ancora mature tanto da potere indossare l'abito delle parole giuste: in generale a scuola questo non è accettato e il motivo è semplice: come si fa a capire cosa c'è veramente nella testa del ragazzo, se non è in grado di comunicarlo? Questa prova è interessante per il tentativo di accettare, in presenza di un quesito veramente difficile, anche una comunicazione extra-linguistica. Percentuale degli studenti che hanno dato risposte corrette comunque paurosamente bassa 2,1% Sud; 3,9% Italia; 9,4 % OCSE. Anche il Nord Est in questo caso si situa al di sotto della media OCSE con l'8,6%.

Con la chiave *spazio e forma* è anche presentata la prova *Dadi*, dove è data una serie di 6 dadi che mostrano una faccia. Bisogna in un apposito schema indicare quale numero compare sulla faccia opposta, sapendo che la somma delle facce opposte è sempre sette. La difficoltà in questo caso è minima in sé, basta effettuare una sottrazione per avere il risultato per ogni faccia; ma forse la vera difficoltà sta nell'intendere quanto richiesto e come inserirlo nello schema assegnato. Solo così si spiega la percentuale, veramente bassa in relazione alla semplicità della domanda (41,2% Sud; 49,3% Italia ; 53,2% OCSE con la solita punta del 65,4% del Nord Est).

Problema 6.1

È dato un poligono regolare di 8 lati inscritto in una circonferenza di raggio 1. A quanto è eguale il suo lato?

Problema 6. 2

Luisa ha di fronte a sé un edificio, alto circa m.16,50 e un albero. Sapendo che l'edificio è a m.25 dai piedi di Luisa, e l'albero a m. 5, che Luisa è alta circa m.1,50 e da tale altezza vede allineate la sommità dell'edificio e la cima dell'albero, sapresti dire approssimativamente quanto è alto l'albero?

Problema 6.3

Mario e Gino si trovano su un tratto rettilineo di strada alla distanza di km.5. Mario scorge perpendicolarmente alla strada due torri. Gino per telefono gli comunica che anche lui vede le torri sotto un angolo di 45° l'una e di 60° l'altra. Quale distanza intercorre tra le due torri?

Problema 6.4

Un gruppo di amici si trova in un casolare di campagna; di fronte al casolare, alla distanza di km.3, c'è una collina con una torre di avvistamento: a destra di essa si vede una rupe con un castello. I ragazzi vorrebbero recarvisi, ma non sanno a quale distanza essa si trovi. Sanno però che:

- 1- la retta torre-castello è perpendicolare alla retta casolare-torre;
 - 2- la retta casolare-torre forma un angolo di 60° con la retta casolare-castello.
- Qual è la distanza casolare-castello?

7. Probabilità e statistica

Le domande relative all'incertezza e alla raccolta dati sono tutte molto semplici, ma ciò nonostante il numero delle risposte corrette a livello OCSE e ancora di più in Italia e soprattutto al Sud è molto basso. Una spiegazione forse risiede nel fatto che tali discipline sono da poco entrate nella pratica d'insegnamento e molti insegnanti non sono disposti a rivedere la loro formazione impegnandosi nel lavoro che la didattica delle nozioni ad esse connesse, nuove anche per loro, comporta. Ad esempio il quesito estremamente elementare, *Caramelle colorate*, sebbene a livello OCSE, sia risolto correttamente dal 49,7% degli studenti, in Italia è risolto solo dal 33,7%, con una punta al Sud addirittura del 23,9%. Tra l'altro in questo quesito dovrebbe essere di aiuto la possibilità di scegliere tra più risposte. Si nota infatti nell'ambito delle questioni relative all'incertezza un maggior uso delle domande a risposta multipla, 2/6 (contro una media generale di 5/25).

In *Verifica di scienze* una ragazza vuol fare la media delle votazioni alle sue cinque interrogazioni, sapendo che per le prime quattro la media era di 60 e la quinta interrogazione è stata valutata con 80. In questo caso c'è una piccola difficoltà in più rispetto al caso precedente, perché si pone il problema di come fare una media: si può essere ad esempio tentati dal sommare 60 e 80 e dividere per 2, ma è anche un problema che gli studenti affrontano di continuo e a cui hanno imparato a darsi risposte indipendentemente dalla teoria; e infatti c'è un lieve miglioramento nelle risposte esatte: 34,2% Sud; 47,5% Italia; 44,7% OCSE.

Nella prova *Rifiuti* bisogna indicare perché un certo numero di dati (relativi ai tempi di decomposizione di diversi tipi di rifiuti) che si suppone siano stati raccolti dagli studenti di una classe, non possono essere rappresentati con un istogramma. L'ambito di discorso è di attualità, può diventare altamente educativo per il suo significato ecologico e quindi potenzialmente coinvolgente: la ricerca (non richiesta ovvia-

mente nella prova, ma data per effettuabile) può addirittura essere contagiosa. La risposta però (anche in questo caso molto bassa tra i ragazzi italiani, 34,9% contro una media OCSE del 50,5%) presuppone un po' di pratica con simili strumenti: è chiaro che chi non ha mai costruito o almeno commentato un diagramma a colonne possa trovarsi in difficoltà.

In *Terremoti* i ragazzi debbono semplicemente scegliere tra quattro possibili risposte (è l'altra prova a risposta multipla nella classe dell'incertezza) quale è il reale significato delle parole di un geologo che ha previsto un terremoto a Zedopoli con probabilità 2 su 3. Ora stime di questo tipo non dovrebbero essere del tutto nuove per buona parte dei ragazzi, e quindi il loro significato non dovrebbe poi essere molto oscuro: ed infatti le risposte esatte sono nel caso OCSE del 44,8%; Italia 42,6%; Sud 39,1%.

Anche il quesito di *Scelte* è abbastanza semplice e non lontano dall'esperienza quotidiana dei giovani: in una pizzeria si può richiedere una pizza con due ingredienti base e si può richiedere l'aggiunta di altri ingredienti scelti tra 4 possibili. Riccardo ne vuole aggiungere due: tra quante combinazioni diverse può scegliere? È chiaro che il problema è risolvibile anche senza andare a scomodare la formula che dà le combinazioni di 4 elementi a due a due, si può fare ad esempio un rapido calcolo di tutte le possibilità ... Media OCSE 48,2%; Italia 44,4%; Sud 36,7%.

8. Conclusioni

Uno degli scopi fondamentali nella formazione matematica dei giovani è la capacità di formalizzare in termini di numero e quantità o di forma e spazio, o ancora di relazione gli oggetti del discorso scientifico e l'educazione a tal fine può avvenire solo attraverso un lungo e difficile processo di successive astrazioni. Il grado di difficoltà incontrato dal ragazzo è legato alla maggiore o minore attitudine che egli ha a confrontarsi con situazioni di cui sia stimolato a chiarire la generalità, attitudine che si sviluppa o meno sin dai primi anni in ambito familiare e ambientale. La scuola ha precisamente questo grande e delicato compito di far crescere e a volte nascere da questo punto di vista i ragazzi, sopperendo molto spesso alle carenze culturali dell'ambito familiare e/o sociale. Questo compito, che non è assolutamente di natura tecnica,

si può svolgere con i mezzi più disparati, trasversalmente, ad esempio con buone lezioni di storia, di filosofia o di letteratura. Ma coloro che sono chiamati in prima persona alla sua esecuzione sono soprattutto gli insegnanti di matematica: partendo dal basso, come ci fanno vedere le prove OCSE-PISA, prendendo le mosse da un livello estremamente elementare e non troppo lontano dalla quotidianità si incomincia un lento e lungo viaggio verso la formalizzazione e la determinazione di regole da interiorizzare completamente, finché diventino pratica corrente di ragionamento.

Ecco cosa suggeriscono tali prove: innanzi tutto una grande cura è rivelata nella correzione tenendo conto anche dei risultati parziali e cercando in alcuni casi di afferrare anche le idee non completamente esplicitate, nulla è dato per scontato, banale; più che domande a risposta multipla ci sono domande che chiedono di motivare la risposta, a volte anche in più modi; grande appello è fatto all'intuizione, all'interesse suscitato dagli argomenti, in definitiva al gusto. Ad esempio non può lasciare che stupiti vedere che risultati relativamente buoni sono stati ottenuti con la prova *Velocità di un'auto da corsa*, dove su questioni in cui i ragazzi erano teoricamente disarmati, ma sicuramente interessati si sono avute alte percentuali di risposte corrette. E vien da chiedersi: lo scopo di un buon insegnamento non è forse di accendere nei ragazzi lo stesso tipo di interesse anche verso concetti astratti e apparentemente più lontani dalla realtà, andandone a indagare il significato profondo, le motivazioni che ne sono all'origine, i collegamenti a volte in un ambito multidisciplinare, le possibili applicazioni?

La semplice lettura di grafici e istogrammi dà pure risultati discreti. Ma nel complesso le prove danno risultati complessivamente molto deludenti sia per quanto riguarda l'Italia nel confronto con gli altri paesi dell'OCSE, sia soprattutto per il Sud, che ne esce veramente male. E non si può pensare che tale situazione dipenda esclusivamente dalle condizioni economiche svantaggiate di questa terra, gli insegnanti dovrebbero sentirsi in qualche modo responsabili di un tale disastro.

Le perplessità maggiori che nascono dalla lettura dei risultati sono comunque le seguenti: è molto carente nei ragazzi il confronto dei dati (vedi ad es. *La crescita*), spesso la semplice comprensione del testo anche nel caso di quesiti facilmente abordabili (vedi *Dadi*, *Carpentiere*, *Caramelle colorate*, etc..), la conoscenza di elementari proprietà geometriche delle figure (*Carpentiere*, *Fattorie* etc..), l'abilità nel manipolare

facilissime formule (*Andatura*) e soprattutto la capacità di formalizzare e ragionare in astratto (vedi *Meli*), fatto quest'ultimo che sorprende un po' meno, tenendo conto delle maggiori difficoltà che presenta per ragazzi ancora alle prime prove con ragionamenti di questo tipo.

Con la matematica si può anche giocare

di Barbara Brandolini¹, Guido Trombetti²

Dalle nostre scuole escono studenti poco preparati in matematica. Che fare? La risposta non è facile. Innanzitutto, occorrerebbe intervenire sull'insegnamento. Troppo spesso si preferisce concentrare la didattica su un formalismo paralizzante e trasformare la matematica in una successione di operazioni meccaniche, da catena di montaggio. Il che ovviamente non affascina e, meno che mai, stimola la fantasia. Troppi "conti" non motivati e senza alcun legame con problemi reali. Già alcuni decenni fa, il grande matematico pisano Giovanni Prodi affermava: "Eppure quanto sono profondi i legami della matematica con l'economia, l'architettura, l'ingegneria, la biologia, l'arte, la letteratura! Praticamente con tutto. C'è una struttura matematica persino nella Divina Commedia. Nei semi di girasole... La matematica, prima di essere un corpus insieme di metodi, tecniche e teoremi, è un modo di guardare il mondo. E perché non collegare mai la nascita dei grandi capitoli della matematica alla temperie socio-culturale in cui hanno visto la luce? La prospettiva è l'invenzione delle nuove rappresentazioni pittoriche dell'umanesimo. I limiti e gli infinitesimi hanno consentito a Newton di trovare il linguaggio della nuova fisica che andava inventando. Il calcolo delle probabilità nasce dal gioco d'azzardo. I numeri, dopo secoli di eclisse, tornano in auge nel '200 con Fibonacci anche (se non principalmente) per soddisfare esigenze di contabilità in attività commerciali. Il problema è immaginare percorsi che consentano di attrarre l'attenzione dei giovani."

Dunque uno strumento utile potrebbe essere la buona divulgazione scientifica. E, perché no, i giochi matematici. Alcune delle più affascinanti teorie matematiche affondano le loro origini nel gioco. Nel gusto di trovare la soluzione di un rom-

¹Università degli Studi di Napoli "Federico II", Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Complesso Monte S. Angelo - Via Cintia, 80126 Napoli, Italia. e-mail: brandolini@unina.it

²Università degli Studi di Napoli "Federico II", Dipartimento di Fisica, Complesso Monte S. Angelo - Via Cintia, 80126 Napoli, Italia. e-mail: guido.trombetti@unina.it

picapo. Mescolando in modo indissolubile l'aspetto ludico ricreativo con quello puramente speculativo, i giochi matematici potrebbero rivelarsi uno strumento utile per suscitare l'interesse dei giovani. Il gioco non deve essere visto come pausa tra le cose serie, come purtroppo una cultura bacchettona ci ha abituato a pensare. Il gioco è la serissima attività che fanno i bambini per esplorare il mondo e per mettere a punto le proprie capacità. È il modo più efficace per imparare, perché coinvolge non solo le proprie capacità intellettuali, ma anche le capacità sociali, ed infine mobilita le proprie capacità emotive. Senza emozione, è bene sottolinearlo, non c'è apprendimento. Il nostro cervello impara in modo efficace e duraturo solo se prova emozioni. Senza la colla dell'emozione, qualsiasi ricordo è destinato a scomparire. Basterà riflettere su cosa ricordiamo della nostra vita per averne immediata conferma. E l'unico modo per insegnare efficacemente la matematica è trasformarla da un'arida sequenza di astratte proposizioni in coinvolgimento, sfida, storia, vita, gioco, cioè emozioni.

Un buon gioco matematico deve essere presentato usando il più possibile il linguaggio comune, rinviando l'introduzione del linguaggio tecnico-specialistico. Che essendo a sua volta importante va recuperato più innanzi.

I giochi matematici hanno avuto sin dall'antichità una grande importanza nello sviluppo del pensiero. Potremmo compiere un viaggio attraverso tutte le epoche e le civiltà umane solo inseguendo giochi matematici. Dall'antico Egitto alle civiltà greca e romana, dall'antica Cina alla cultura islamica a cavallo dell'anno 1000, fino ad arrivare al Rinascimento italiano ed alle scoperte che hanno cambiato il volto della scienza tra il XVII ed il XVIII secolo. In tempi recenti, propositore e risolutore di giochi matematici è stato Paul Erdős, uno dei più eccentrici ed originali matematici contemporanei (noto a molti come protagonista de "L'uomo che amava solo i numeri", scritto da P. Hoffman [16]). In ogni epoca, da un lato il gioco ha avuto la potenza di avvicinare le "menti incolte" alle meraviglie della matematica, dall'altro ha consentito la formulazione da parte dei matematici di nuove teorie. Per esempio, molti storici della matematica fissano la nascita del moderno calcolo delle probabilità nel fitto epistolario datato 1654 tra Pascal e Fermat sui quesiti posti dal Cavaliere de Méré a Pascal circa il gioco d'azzardo ("Esiste la stessa probabilità di vincere scommettendo che esca almeno un 6 su 4 tiri consecutivi, lanciando un dado alla volta, oppure scommettendo che escano almeno due 6 su 24 tiri, lanciando due dadi alla volta?") In effetti già Luca Pacioli, che avremo il piacere di incontrare di nuovo più tardi, nel suo "Summa de aritmetica" datato 1494, aveva trattato l'argomento insieme al cosiddetto problema delle parti che consiste nel calcolo di come deve essere divisa la posta di una certa partita se essa viene interrotta prima che vi sia un vincitore. I primi studi conosciuti su questioni di probabilità si riferiscono al gioco dei dadi e compaiono nel libro "De ludo aleae" di Girolamo Cardano (1501-1576), celebre medico, appassionato di meccanica, matematica, a sua volta accanito giocatore. Cardano scrisse sul gioco dei dadi intorno al 1525, ma il libro fu pubblicato postumo nel

1663; egli amava molto questo tipo di gioco, nel quale, da una parte dissipò molte delle sue sostanze, dall'altra trovò qualche volta un modo per incrementare le sue entrate, vincendo più di quanto perdesse, anche se era solito affermare che “..l'unico vantaggio deriva dal non giocare per niente...”. Nella speranza di aumentare le sue possibilità di vittoria, egli studiò a fondo il gioco a tal punto che può essere considerato il primo ad aver gettato le basi del moderno Calcolo delle probabilità. Anche Galileo Galilei, qualche anno più tardi, intorno al 1630, si occupò di probabilità ed il suo contributo fu notevole. Nella sua opera “Sulla scoperta dei dadi”, come Pascal fece il calcolo dei casi favorevoli all'avverarsi di un evento rispetto a tutti quelli possibili. Su richiesta di un gruppo di nobili fiorentini che volevano capire come mai nel gioco a tre dadi detto zara uscissero con una frequenza maggiore il 10 e l'11 rispetto al 9 o al 12, Galileo calcolò che esistono 27 modi per ottenere il 10 e l'11 da tre dadi contro i soli 25 per il 9 e il 12.

Nessuno dei giochi, problemi o paradossi che presentiamo in questa nota è originale. Esiste un numero consistente di libri o di siti internet che si occupano di tali questioni (cfr. bibliografia da [1] a [28]) e dai quali abbiamo attinto abbondantemente. Uno fra tutti il celebre testo di Martin Gardner [12]. Noi proponiamo un doppio percorso al lettore. Innanzitutto un percorso di tipo storico con la descrizione di quattro celebri giochi matematici risalenti a quattro epoche differenti della storia umana. Quindi un percorso di tipo contenutistico con la descrizione di dieci giochi che affondano le radici in diverse aree della matematica tuttora oggetto di ricerche. La nostra intenzione è quella di convincere il lettore che il gioco non è un'attività banale né inutile. Men che mai irriverente verso la regina delle scienze. Tutt'altro. Forse l'utilizzo di giochi potrebbe (forse!) contribuire a suscitare nei giovani un maggiore interesse verso la matematica. Quell'interesse che si va estinguendo nella foresta di formule di prostaferesi e di parentesi quadre o graffe così impenetrabile per i ragazzi.

Cominciamo il nostro viaggio a spasso nel tempo.

1) Il papiro di Rhind

Uno dei primi giochi matematici risale al secondo millennio avanti Cristo. Siamo nell'antico Egitto intorno al 1650 a.C. ed uno scrivano riporta su un papiro (oggi noto come papiro di Rhind dal nome dell'antiquario scozzese che lo acquistò nel 1858 a Luxor, e conservato al British Museum di Londra) vari problemi di natura aritmetica, algebrica e geometrica. Ecco uno dei quesiti:

“Ciascuna delle sette case contiene sette gatti; ogni gatto mangia sette topi ed ogni topo aveva mangiato sette spighe di grano. Ciascuna spiga di grano avrebbe prodotto sette stai di farina. Di quante cose abbiamo complessivamente parlato?”

19607 risponde prontamente il matematico che passa per caso accanto allo scrivano. Lo scrivano alza occhio interrogativo ed il matematico spiega:

$$\begin{aligned} 7 \text{ case} &+ 7 \cdot 7 \text{ gatti} + 7 \cdot 7 \cdot 7 \text{ topi} + 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \text{ spighe di grano} \\ &+ 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \text{ stai di farina.} \end{aligned}$$

In sostanza lavoriamo con due numeri: 7 e 5 (le categorie di oggetti: case, gatti, topi, spighe di grano, stai di farina). Sommiamo in maniera semplice

$$\begin{aligned} &7 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \\ &= 7 \cdot (1 + 7 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \\ &= 7 \cdot (1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) \\ &= \frac{7}{7-1} \cdot (1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) \cdot (7-1) \\ &= \frac{7}{6} \cdot (7^5 - 1) = 19607. \end{aligned}$$

Questo ragionamento può essere ripetuto assumendo che invece di 7 venga considerato un numero naturale n ed invece di 5 un numero naturale k . Alla fine:

$$n + n^2 + \dots + n^{k-1} = \frac{n}{n-1} \cdot (n^k - 1).$$

Otteniamo la soluzione al quesito iniziale posto dallo scrivano scegliendo $n = 7$ e $k = 5$.

2) Il problema dei buoi di Trinacria

Passano i secoli e ci ritroviamo nella Magna Grecia. Archimede (Siracusa 287 a. C. circa-212 a. C.), uno dei pensatori più famosi di tutti i tempi, propone il seguente quesito al suo fedele amico Eratostene da Cirene:

“Calcola, o amico, il numero dei buoi del Sole, operando con cura, tu che possiedi molta scienza; calcola in quale numero pascolavano un giorno sulle pianure dell’isola sicula Trinacria, distribuiti in quattro gruppi di vario colore: uno di aspetto bianco latteo, il secondo splendente di color nero, il terzo poi di un bruno dorato ed il quarto screziato. In ogni gregge i tori erano in quantità considerevole, distribuiti secondo i rapporti seguenti: ritieni i bianchi come eguali alla metà ed alla terza parte di tutti i neri ed ai bruni; i neri poi eguali alla quarta parte ed alla quinta degli screziati e a tutti i bruni; i restanti screziati considerali poi come eguali alla sesta ed alla settima parte dei tori bianchi e di nuovo a tutti i bruni. Le giovenche invece erano distribuite nei rapporti seguenti: le bianche erano eguali precisamente alla terza e quarta parte di tutto il gregge nero; le nere alla quarta parte insieme alla quinta delle screziate prese assieme ai tori; le screziate erano precisamente eguali alla quinta parte ed alla sesta di tutti gli animali del gregge

bruno; le brune poi vennero valutate eguali alla metà della terza parte ed alla settima parte del gregge bianco. Quando, o amico, avrai determinato esattamente quanti erano i buoi del Sole, avrai distinto quanti erano di ciascun colore, non ti si chiamerà certamente ignorante né inabile nei numeri, però non ti si ascriverà peranco fra i sapienti. Ma ora bada bene a questi altri rapporti fra i buoi del Sole. Quando i tori bianchi mescolavansi ai neri formavano una figura equilatera, le vaste pianure della Trinacria erano allora tutte piene di buoi; invece i bruni e gli screziati costituivano una figura triangolare. Quando avrai trovato tutto questo e l'avrai esposto sotto forma intelligibile e avrai anche trovato il numero totale dei buoi, allora, o amico, va superbo per quanto hai fatto come un vincitore e sta sicuro di venire considerato come ricco di quella scienza" (traduzione di Gino Loria, 1929).

Qual era la composizione della mandria? Diamo la formulazione precisa del problema con il linguaggio "moderno" dei sistemi lineari. Indichiamo con A, B, C, D il numero dei tori dei rispettivi quattro colori, bianco, nero, fulvo, pezzato. Indichiamo con a, b, c, d il numero delle giovenche dei rispettivi quattro colori (sicché $A + a$ = totale degli animali costituenti la mandria bianca, $B + b$ = totale degli animali costituenti la mandria nera, etc.). Otteniamo il seguente sistema di 7 equazioni nelle 8 incognite A, B, C, D, a, b, c, d :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) B + C \\ B = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) D + C \\ D = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) A + C \\ a = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (B + b) \\ b = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (D + d) \\ c = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (A + a) \\ d = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (C + c) \end{array} \right.$$

che ammette infinite soluzioni. Al sistema vanno poi affiancate le due equazioni

$$\begin{aligned} A + B &= \text{numero quadrato} \\ C + D &= \text{numero triangolare,} \end{aligned}$$

dove con numero quadrato intendiamo un numero che può essere scritto nella forma $n^2, n \in \mathbb{N}$, mentre con numero triangolare intendiamo un numero della forma $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}, k \in \mathbb{N}$. Come scrive Thomas Heath nel suo libro "History of Greek Mathematics" (1921): "Questo è un difficile problema di analisi

indeterminata". La sua soluzione conduce alla seguente equazione di Pell-Eulero

$$x^2 - 4729494 \cdot y^2 = 1,$$

la cui soluzione minima y è rappresentata da un numero di oltre duecentomila cifre ed è stata trovata solo nel 1981 da Harry L. Nelson con l'uso di un supercalcolatore. Sorprendente come mandria di buoi!

Il nostro interesse in questa sede non risiede nella risoluzione numerica del sistema, bensì nella sua formulazione moderna (non potrebbe essere uno dei quesiti proposti dalla Susy ogni giovedì sulla settimana enigmistica?). Tra l'altro, molti studiosi ritengono che le conoscenze aritmetiche dell'epoca non fossero sufficienti per risolvere il sistema e pertanto si schierano su due diversi fronti. Da un lato c'è chi sostiene che Archimede volesse farsi beffa dei matematici suoi contemporanei, dall'altro c'è chi propone una diversa formulazione del problema, più semplice da risolvere in quanto coinvolge numeri più piccoli.

Noi concludiamo riportando le considerazioni critiche sollevate dallo storico Gino Loria, al termine dell'analisi del problema: "Da quanto precede risulta che il problema di Archimede merita di essere ascritto fra i più belli che annoveri la letteratura aritmetica, così bello che non ci sovviene alcuno che lo superi per eleganza di forma e valore di sostanza. Esso è difficile assai, ma chi può arrogarsi il diritto di negare ad un genio originale e potente, qual era il Siracusano, la capacità di concepirlo e risolverlo?"

3) Un gioco matematico indiano

Non solo nel mondo occidentale troviamo interessanti spunti di riflessione sulla matematica a partire da giochi. Spostiamoci verso est. Siamo in India, intorno all'anno 1100, ed incontriamo il grande matematico ed astronomo Bhaskara Acharya, il quale non è un poeta anche se talvolta esprime i suoi quesiti in forma poetica e, come molti matematici indiani, scrive le sue regole matematiche in versi:

"Un quinto di uno sciame di api si posa su un fiore di kadamba, un terzo su un fiore di silindhra. Tre volte la differenza tra i due numeri volò sui fiori di un kutuian, e rimase solo un'ape che si librò qua e là per l'aria, ugualmente attratta dal profumo di un gelsomino e di un pandamus. Dimmi tu ora, donna affascinante, qual era il numero delle api".

Nessuno oggi assegnerebbe l'equazione

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x \right) + 1 = x$$

(dove x è il numero delle api) partendo da questa presentazione poetica. Però che fascino, forse i ragazzi la risolverebbero con più interesse. Chiaramente la soluzione è $x = 15$.

4) Il problema del vino

In pieno Rinascimento fra' Luca Pacioli, illustre matematico ed amico di Leonardo da Vinci, riconosceva la validità dei giochi come strumenti di avvicinamento alla matematica. Intorno all'anno 1500 ne raccolse un po' in un libello dedicato ad Isabella d'Este, intitolato "De ludis", da lui chiamato anche Schifanoia. Segnaliamo il seguente testo:

"Doi ànno a partire una bote de vino che tene some 8 e si ne deve ciaschuno avere some 4 in sua parte, e non ànno altri mesure né instrumenti de poderlo partire se non do' altre botti voite, che l'una tiene some 5 e l'ltra tiene some 3. Dimando commo lo partiranno giustamente".

Due persone devono dividere il vino contenuto in una botte da 8 some in modo da averne 4 some ciascuno, e non hanno misure o strumenti di cui servirsi se non altre due botti vuote, una da 5 some e l'altra da 3. Come fanno a ottenere parti uguali?

Inutile dire che un indovinello del genere può essere posto ad un qualunque amico non matematico che venga a trovarci all'ora di cena (sperando che ciononostante torni a trovarci). Non c'è bisogno di alcuna conoscenza matematica profonda per risolverlo. Ed infatti un problema appartenente a questa famiglia è salito alla ribalta della cronaca cinematografica. Nel film "Die Hard 3", i nostri eroi John McClane (Bruce Willis) e Zeus Carver (Samuel L. Jackson), alla mercé del cattivo di turno Simon Gruber (Jeremy Irons), devono risolvere in pochissimi secondi un rompicapo per evitare l'esplosione di una bomba nascosta in una scuola elementare. Sono al parco presso una fontana ed, avendo a disposizione solamente una tanica da tre galloni e una da cinque galloni, devono riuscire a preparare quattro galloni d'acqua. I nostri eroi, probabilmente appassionati di giochi matematici, risolvono l'enigma giusto in tempo.

Riportiamo la soluzione fornita da fra' Pacioli al problema iniziale, la cui rappresentazione grafica è riportata in Figura 1 (in bianco il numero di some di ciascun contenitore):

"Empi quella da 3 e voitala in quella da 5, e poi empi un'altra volta quella da 3 e con essa fornesci de empire quella da 5, e avrai in quella da 8 some 2 e in quella da 3 some una e quella da 5 sirà piena. Ora voita quella da 5 in quella da 8 e siranci some 7, e poi voita quella da 3 in quella da 5: arai in quella da 5 some una e in quella da 8 some 7; poi rempi quella de 3 un'altra volta e remaran in quella da 8 some 4, e poi voita questa da 3 in quella da 5, che ci n'era una e sirancine 4, e così arai 4 some in qua e 4 some in là, e fia partita per altro modo".

Il percorso storico attraverso i più celebri giochi matematici potrebbe andare avanti e coinvolgere altri illustri personaggi come Alcuino di York, a cui si deve la prima formulazione in occidente del celebre problema del lupo, della capra e del cavolo (siamo alla fine dell'VIII secolo); Leonardo Pisano, noto come Fibonacci, a cui si deve la formulazione del celebre problema dei conigli (siamo a Pisa a

8	5	3
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

Figura 1: *La soluzione del problema del vino proposta da Luca Pacioli*

cavallo tra il XII ed il XIII secolo); Leonardo da Vinci, Piero della Francesca, Tartaglia, Pascal, Cartesio, Fermat, ... fino ad Erdős. Pur essendo convinti che la storia della matematica andrebbe studiata nelle scuole, interrompiamo il nostro viaggio nel tempo per iniziarne uno nei contenuti: primo argomento il calcolo delle probabilità.

5) La probabilità, due casi estremi: evento certo ed evento impossibile

Forse niente è più scivoloso dei concetti del calcolo delle probabilità. Vanno maneggiati con estrema cura. In fondo sono concetti che usiamo tutti i giorni, anche per prendere le decisioni più banali. Innanzitutto, che cos'è la probabilità? È un numero compreso tra 0 e 1. A cosa si applica la probabilità? Ad un insieme di eventi. Facciamo qualche semplice esempio. Pensiamo ad un comune dado, con le facce numerate da 1 a 6, perfettamente bilanciato, cioè non truccato (in un lancio tutte le facce hanno la stessa probabilità di uscire). Per evento intendiamo ogni situazione che sia riferita ad un lancio del dado. "Esce 3" è un evento. "Esce un numero pari" è un evento. "Esce un numero più grande di 2" è ancora un evento. Chiunque risponderebbe che la probabilità dell'evento "esce 3" è $\frac{1}{6}$, la probabilità dell'evento "esce un numero pari" è $\frac{3}{6}$, mentre quella dell'evento "esce un numero più grande di 2" è $\frac{4}{6}$. In questo contesto in cui l'insieme degli eventi elementari è finito, per ottenere questi risultati basta fare il rapporto tra il numero di casi favorevoli alla realizzazione dell'evento ed il numero di casi possibili. Certo le cose si complicano un po' se giochiamo con due dadi, anche se la definizione di probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili permane. Per esempio, qual è la probabilità che, lanciando due dadi, escano due numeri uguali? Qual è la probabilità che, lanciando due dadi, escano due numeri la cui somma è

9? Elenchiamo tutti i casi possibili come in figura ed evidenziamo in rosso i casi favorevoli. Otteniamo che

- la probabilità che, lanciando due dadi, escano due numeri uguali è $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$;
- la probabilità che, lanciando due dadi, escano due numeri la cui somma è 9 è $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

In ogni caso, finché giochiamo con i dadi (numero finito di casi possibili), tutto è facile. Quasi ovvio. Eppure le nozioni di evento certo ed evento impossibile possono diventare insidiose, sul piano semantico addirittura paradossali. Per superare queste difficoltà, se un evento ha probabilità 0 parliamo di evento *quasi* impossibile, mentre parliamo di evento *quasi* certo se esso ha probabilità 1. Chiaramente, l'evento impossibile (quello che non si realizza mai) ha esso stesso probabilità 0 e l'evento certo (quello che si realizza sempre) ha probabilità 1. Nel contesto precedente del lancio di un unico dado è certo (impossibile) l'evento "Si realizza un punteggio appartenente (non appartenente) all'insieme costituito dai primi 6 numeri naturali"; non esistono eventi quasi certi (quasi impossibili).

Un evento quasi certo non è detto che si verifichi certamente, così come non possiamo escludere che un evento quasi impossibile non si verifichi per davvero! Facciamo un esempio. Pensiamo ad un bidone con base circolare di area 1. Lanciamo a caso nel bidone una pallina tanto piccola da poter essere assimilata ad un punto. Qual è la probabilità che la pallina si fermi in una determinata regione A del cerchio? È più che ragionevole assegnare ad un evento di questo tipo la probabilità "area di A ". Più grande è A , più grande sarà la probabilità che la pallina si fermi in A . Adesso fissiamo un singolo punto P nel cerchio di base del cilindro. Qual è la probabilità dell'evento "La pallina si ferma in P "? Poiché l'area di un punto è 0, la probabilità dell'evento è 0. Si tratta cioè di un evento quasi impossibile. Eppure potrebbe verificarsi che la pallina si fermi proprio in P , anche perché la pallina in qualche punto è pur vero che si fermerà. Così la probabilità dell'evento "La pallina si ferma in un punto del cerchio diverso da P " è 1 poiché l'area del cerchio privato di un punto è uguale all'area del cerchio e cioè ad 1.

Quindi l'evento "La pallina si ferma in un punto del cerchio diverso da P " è un evento quasi certo... che ovviamente non è certo che si verifichi! È chiaro che dal punto di vista del giocatore d'azzardo l'evento "La pallina si ferma in un punto del cerchio diverso da P " merita qualunque scommessa, salvo poi imprecare contro il destino cinico e baro.

6) Il problema di Monty Hall

Nella rivista americana "Parade" sin dal 1986 viene pubblicata una rubrica fissa dal titolo "Ask Marilyn". È scritta da Marilyn vos Savant che si dice abbia uno dei quozienti d'intelligenza più alti al mondo. In questa rubrica Marilyn risponde a quesiti di matematica e logica inviati dai lettori. Nel settembre del 1990 il signor Craig F. Whitaker di Columbia, Maryland, le spedì il seguente quesito tratto da una puntata dello show televisivo "Let's make a Deal" (il cui conduttore si chiamava Monty Hall):

"Un uomo partecipa ad un quiz televisivo. Può vincere una Ferrari. Il presentatore gli mostra tre porte e gli dice che dietro ad una delle porte c'è l'auto in palio mentre dietro alle altre due ci sono due capre. Gli chiede di sceglierne una. La porta indicata non viene aperta. Il presentatore invece apre una delle porte che il concorrente non ha scelto e mostra una capra (lui sa cosa sta dietro ad ognuna delle porte). A questo punto il presentatore dà al concorrente un'ultima possibilità prima che si spalanchino tutte le porte e vinca un'auto o una capra. Gli domanda se vuole cambiare idea e scegliere una delle porte ancora chiuse. Che cosa gli suggerisci di fare?"

Marilyn vos Savant rispose che bisogna sempre cambiare e scegliere la porta finale poiché ci sono due possibilità su tre che ci sia un'auto dietro quella porta. Ma l'intuito ci spingerebbe a pensare che le probabilità che dietro a ognuna delle due porte si trovi l'auto siano identiche. Molti lettori scrissero alla rivista dicendo che Marilyn aveva torto, anche se aveva fornito spiegazioni molto dettagliate sulle motivazioni della sua scelta. Il 92% delle lettere sostenevano che si era sbagliata, e molte provenivano da matematici e scienziati.

Ecco alcune delle frasi contenute in queste lettere:

La generale e assoluta mancanza di competenza matematica mi sconcerta. Per favore dia un contributo alla causa confessando il suo errore.

Robert Sachs, Ph.D., George Mason University

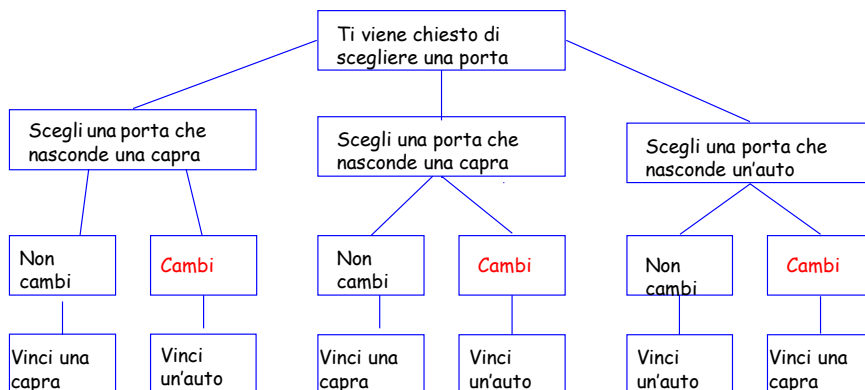
Sono allibito all'idea che dopo essere stata corretta da almeno tre matematici, lei continui a non riconoscere il suo errore.

Kent Ford, Dickinson State University

Sono convinto che riceva molte lettere da studenti liceali e universitari. Forse dovrebbe conservare qualcuno di questi indirizzi per le prossime rubriche.

W. Robert Smith, Ph.D., Georgia State University

Anche Paul Erdős cadde in errore! Marilyn vos Savant però aveva ragione e dal diagramma in figura capiamo immediatamente perché.



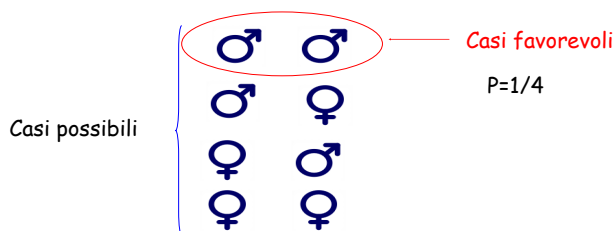
Quindi, se cambiamo porta, 2 volte su 3 vinciamo un'auto. Se invece manteniamo la nostra decisione, vinciamo solo 1 volta su 3.

Questo dimostra che qualche volta l'intuito può portare all'errore. E che l'intuito è ciò che usano le persone nella vita di tutti i giorni per prendere le decisioni. Ma la logica può essere utile per elaborare la risposta giusta.

7) Probabilità ed ambiguità

Da quanto abbiamo prima scritto, appare chiaro che di fronte al calcolo della probabilità di un evento occorre essere molto cauti. Consideriamo la seguente situazione.

Il sig. Mario Rossi ha due figli. La probabilità che entrambi siano maschi è $\frac{1}{4}$.



Anche il sig. Francesco Rossi ha due figli. La probabilità che entrambi i figli siano femmine è $\frac{1}{4}$ (vedi Figura 2).

Il sig. Giuseppe Rossi ha due figli. Il più grande è maschio. La probabilità che entrambi i figli siano maschi è allora $\frac{1}{2}$ poichè, come si evince dalla Figura 3, il numero di casi possibili si riduce a 2 con un unico caso favorevole.

Infine il sig. Vincenzo Rossi ha due figli, di cui almeno uno è maschio. Qual è la probabilità che entrambi siano maschi? Dalla Figura 4 appare chiaro che la risposta è $\frac{1}{3}$.

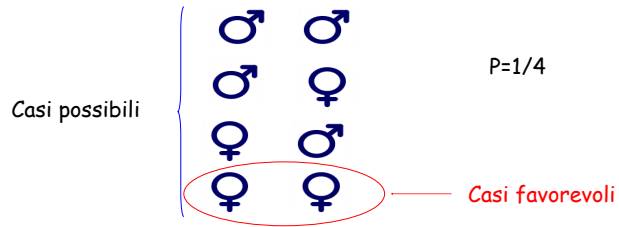


Figura 2: Figli del sig. Francesco Rossi

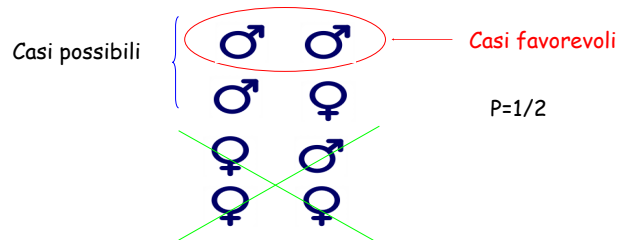


Figura 3: Figli del sig. Giuseppe Rossi

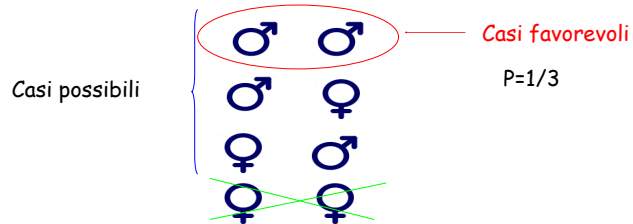


Figura 4: Figli del sig. Vincenzo Rossi

Si potrebbe obiettare però che: se fosse il primo figlio ad essere maschio allora la probabilità varrebbe $\frac{1}{2}$; se fosse il secondo figlio ad essere maschio allora la probabilità varrebbe $\frac{1}{2}$. Dunque, indipendentemente da quale figlio è noto a priori essere maschio, la probabilità dovrebbe essere $\frac{1}{2}$. Qual è la risposta corretta? $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{2}$? Potremmo ambigualmente rispondere che le risposte sono entrambe corrette!

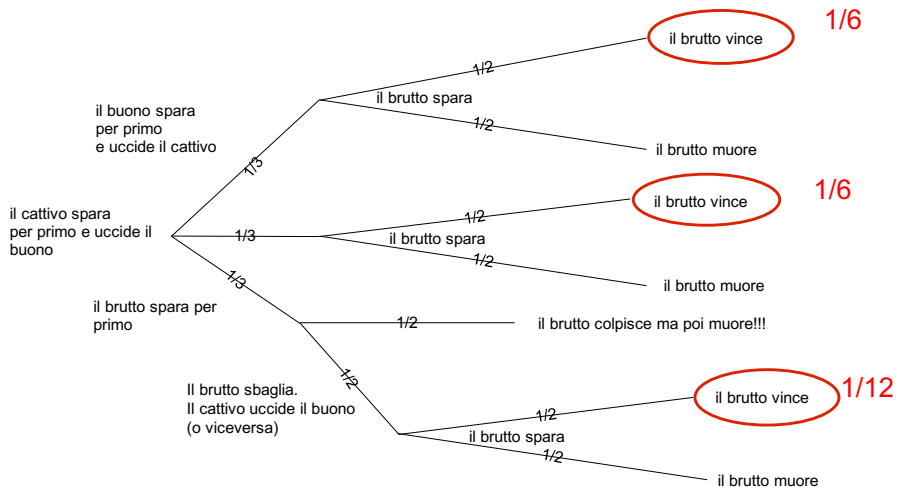
L'ambiguità risiede nel fatto che non è specificata la maniera in cui viene acquisita l'informazione che uno dei figli è maschio. Il punto è che ci sono problemi diversi che hanno la stessa formulazione. Si chiede al sig. V. Rossi di scegliere a caso uno dei suoi due figli svelando se si tratta di un maschio o di una femmina. Il signor V. Rossi dice maschio. In questo caso la probabilità che anche il secondo sia maschio è $\frac{1}{2}$. Consideriamo tutte le coppie di fratelli, escludendo quelle coppie in cui non vi siano maschi. Se sappiamo che la coppia di figli del sig. V. Rossi è tra queste, allora la probabilità che entrambi i figli siano maschi è $\frac{1}{3}$. I due problemi hanno la stessa formulazione:

“Il sig. Vincenzo Rossi ha due bambini. Almeno uno di essi è maschio. Qual è la probabilità che entrambi siano maschi?”

8) I tre pistoleri

Siamo nel Far West (o magari semplicemente sul set di un film di Sergio Leone) e stiamo per assistere ad un combattimento tra tre pistoleri. Il cattivo colpisce ogni volta che spara. Il buono anche. Il brutto colpisce una volta su due. La disfida seguirà le seguenti regole: si stabilisce a caso un turno per sparare ed ognuno è libero di sparare a chi vuole. Ogni pistolero spara al massimo delle proprie possibilità al fine di uccidere.

Quale sarà l'esito del combattimento?



Dal grafo riportato in figura risulta che la probabilità di vittoria del brutto è

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

La probabilità di vittoria del buono è ovviamente uguale a quella del cattivo ed è pari a

$$\frac{7}{24} < \frac{5}{12}.$$

Paradossalmente il pistolero meno abile ha maggiori speranze rispetto ad ognuno degli altri due.

Cosa succede se i pistolieri ignorano le abilità dei loro avversari? È lecito supporre che ciascuno sceglierà un bersaglio a caso. La probabilità di vittoria del brutto si dimezza e diventa $\frac{5}{24}$. Quelle del buono e del cattivo diventano $\frac{19}{48}$. Questa volta $\frac{19}{48} > \frac{5}{24}$. Nel Far West è meglio non fingere di essere un buon pistolero!

Cosa possono fare il buono e il cattivo? Possono ignorare di sapere che il brutto è un pistolero scarso? Possono fare comunella! Una simile strategia in economia si chiamerebbe “fare cartello”. Ma nessuno dei due può migliorare la propria posizione cambiando la propria strategia in maniera unilaterale. Queste considerazioni sono alla base di una branca della matematica nota come teoria dei giochi, uno dei cui padri fondatori è il celebre John Nash che così descrive l’idea di equilibrio in un’intervista a Piergiorgio Odifreddi: “Un gioco può essere descritto in termini di strategie, che i giocatori devono seguire nelle loro mosse: l’equilibrio c’è quando nessuno riesce a migliorare in maniera unilaterale il proprio comportamento. Per cambiare, occorre agire insieme.”

9) Il paradosso dei corvi

Ogni volta che guardiamo un corvo osserviamo che è nero. Quindi tutti i corvi sono neri.

Questo tipo di ragionamento è noto come induzione statistica ed è alla base di tutte le discipline sperimentali: su di esso si basano le diagnosi mediche, la raccolta di prove nei processi, le indagini statistiche. Esso ha però dei limiti come è stato osservato da Carl Gustav Hempel negli anni '40.

Dal punto di vista logico la proposizione “tutti i corvi sono neri” equivale alla proposizione “tutti i non neri sono non corvi”. Ciò significa che verificare la validità della prima proposizione è logicamente equivalente a verificare la validità della seconda. Pertanto, dopo ogni osservazione di un corvo nero, la teoria che tutti i corvi siano neri diviene ai nostri occhi sempre più probabilmente vera, coerentemente col principio induttivo. Pare ogni volta sempre più corretto registrare l’affermazione “tutti i corvi sono neri” come probabilmente vera. D’altro canto l’osservazione di una mela rossa conferma la validità della proposizione “tutti i non neri sono non corvi”. Ma la mela rossa è anche non bianca: la mela rossa è non bianca e non corvo. L’osservazione di una mela rossa è dunque una conferma

che tutti i corvi sono bianchi? Il problema risiede nel riuscire a quantificare il potere induttivo dell'osservazione della mela rossa per dimostrare che tutti i corvi sono neri. Per fare ciò bisognerebbe conoscere il numero di corvi esistenti, così come il numero totale di tutti gli altri oggetti esistenti al mondo. Per cercare di smitizzare il paradosso di Hempel consideriamo il seguente esempio. Siano date due scatole, la numero 1 e la numero 2. Una biglia è nascosta dentro una delle due scatole ma noi non sappiamo in quale sia. Vogliamo verificare la validità della seguente proposizione "la scatola numero 1 contiene la biglia". È chiaro che ci sono due modi per farlo, aprire la scatola numero 1 o la scatola numero 2. Il primo è una verifica diretta dell'affermazione "la scatola numero 1 contiene la biglia", il secondo verifica la proposizione equivalente "la scatola che non contiene la biglia non è la numero 1". Le due proposizioni sono equivalenti ed entrambi i metodi ci consentono di verificare immediatamente la veridicità della nostra ipotesi. Supponiamo ora di avere mille scatole numerate e che due, e solo due, di esse nascondano una biglia. Vogliamo verificare la veridicità della proposizione "le prime due scatole contengono ciascuna una biglia". Una proposizione equivalente è "le scatole che non contengono le biglie non sono la numero 1 e la numero 2". Ora è chiaro che aprire la scatola numero 1 e scoprire che dentro c'è una biglia corrobora la prima proposizione, ma anche aprire la terza scatola e scoprire che è vuota corrobora la seconda proposizione, e dunque la prima. Il trucco è però che la cosiddetta induzione statistica è molto più forte nel primo caso piuttosto che nel secondo, e ciò è dovuto essenzialmente all'elevato numero di scatole vuote rispetto a quelle piene. Andando avanti nel processo induttivo, nel primo caso, dopo aver aperto la prima scatola, mi basta aprire la seconda scatola per avere o meno la certezza della veridicità della nostra affermazione. Nel secondo caso, invece, dopo aver aperto la terza scatola dobbiamo andare avanti ed aprire la quarta scatola, la quinta, etc. eventualmente fino alla millesima. Ogni volta che apriamo una scatola e la troviamo vuota aumenta la fiducia che abbiamo nella seconda proposizione, ma solo dopo aver aperto tutte le scatole avremo la certezza della sua veridicità. Tornando ora ai corvi neri, osservare che la mela è rossa è come aprire una scatola vuota. Ma gli oggetti al mondo che sono non corvi non si limitano alla mela rossa. Essi sono innumerevoli e, pertanto, ogni osservazione vera fatta sui non corvi corrobora in maniera insignificante la proposizione "tutti i corvi sono neri".

10) Le noci di cocco e l'ultimo teorema di Fermat

Proponiamo ora un famoso problema pubblicato da Ben Ames Williams su "The Saturday Evening Post" nel 1926.

Su un'isola deserta cinque naufraghi ed una scimmia passano una giornata a raccogliere noci di cocco. Mentre tutti dormono, uno dei naufraghi si sveglia e divide le noci in 5 mucchi uguali. Rimane una noce che egli dà alla scimmia, poi nasconde il suo mucchio e mette tutto il resto assieme. Subito dopo un secondo

uomo si sveglia e fa la stessa cosa. Così il terzo, il quarto, il quinto. Alla mattina i naufraghi dividono in parti uguali le noci rimaste. Ne avanza solo una, che danno alla scimmia. Qual è il minimo numero di noci che hanno raccolto i naufraghi?

Indichiamo con N il numero totale di noci; con A, B, C, D, E il numero di noci nascoste dal primo, secondo, terzo, quarto, quinto naufrago, rispettivamente; con F il numero di noci che ciascun naufrago riceve nell'ultima divisione al mattino. Impostiamo il seguente sistema lineare, in cui tutte le incognite sono numeri interi e $N > F$:

$$\begin{cases} N = 5A + 1 \\ 4A = 5B + 1 \\ 4B = 5C + 1 \\ 4C = 5D + 1 \\ 4D = 5E + 1 \\ 4E = 5F + 1. \end{cases}$$

Sostituendo all'indietro ricaviamo la seguente equazione

$$1024N = 15625F + 11529. \quad (1)$$

Questa equazione ha infinite soluzioni, ma a noi basta conoscere la più piccola soluzione intera. Paul Dirac (1902-1984), brillante matematico e vincitore del premio Nobel per la fisica nel 1933, propose un'interessante idea per risolvere il quesito dei naufraghi. Dirac introdusse l'idea dell'anticocco!

Supponiamo di avere 4 noci di cocco negative (anticocchi): $N = -4$. Il primo naufrago dà una noce alla scimmia (le noci diventano -5), prende la sua quota (-1) e lascia le rimanenti -4 . Così il secondo, il terzo, il quarto, il quinto. Alla mattina si ritrovano con -4 noci. Una va alla scimmia. Ciascun naufrago ha un anticocco.

Dunque $N = -4$, $F = -1$ risolvono l'equazione (1):

$$1024N = 15625F + 11529 \iff 1024 \cdot (-4) = 15625 \cdot (-1) + 11529.$$

Quello appena visto è un esempio di soluzione perfettamente corretta dal punto di vista matematico, ma (visto che non possiamo realizzare gli anticocchi) irrealizzabile in pratica (d'altra parte, si dice che questa soluzione negativa abbia avuto una certa influenza sul pensiero di Dirac, che poi avrebbe introdotto il concetto di antimateria). In questo caso, però, è facile trovare un criterio che elimini la soluzione di Dirac, in quanto non realistica. Osserviamo infatti che se N risolve l'equazione, anche $N + 5^6 = N + 15625$ risolve l'equazione e tutte e sole le soluzioni intere si scrivono in questa forma. Pertanto

$$-4 + 15625 = 15621$$

è il numero di noci che cerchiamo.

L'equazione (1) è un esempio di equazione diofantina, cioè di equazione con coefficienti interi di cui si ricercano le soluzioni intere. A Diofanto di Alessandria, padre dell'algebra, vissuto tra il III e IV secolo, si deve un famoso problema che egli scelse come epitaffio sulla sua tomba:

“Questa tomba rinchiude Diofanto. Oh, meraviglia! Essa dice matematicamente quanto egli ha vissuto. Dio gli accordò il sesto della sua vita per l'infanzia; aggiunse un dodicesimo perché le sue guance si coprissero della peluria dell'adolescenza; inoltre per un settimo fece brillare per lui la fiamma d'Imene e dopo cinque anni di matrimonio gli diede un figlio, ahimè! Unico ed infelice bambino al quale la Parca non permise di vedere che la metà della vita di suo padre. Durante quattro anni ancora consolando il suo dolore con lo studio delle cifre, Diofanto raggiunse alfine il termine della sua vita”.

Quanto visse Diofanto? Se indichiamo con x il numero di anni vissuti da Diofanto, otteniamo la seguente equazione

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x,$$

la cui soluzione è $x = 84$.

La più celebre equazione diofantina è sicuramente

$$x^n + y^n = z^n,$$

per la quale Fermat congetturò la non esistenza di soluzioni intere x, y, z se $n > 2$. Solo nel 1994, dopo sette anni di dedizione completa al problema, Andrew Wiles, affascinato dal teorema che fin da bambino sognava di risolvere, è riuscito finalmente a dimostrare la validità di tale congettura.

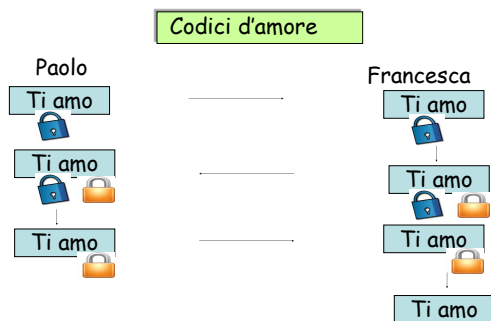
11) Matematica segreta

L'esigenza di scambiare messaggi privati, incomprensibili per un estraneo non autorizzato che in un modo o nell'altro ne venga in possesso, sembra essere antica quanto la scrittura. Esempi di testi volutamente cifrati, cioè trasformati in modo da non essere intellegibili se non dopo essere stati decifrati, sono giunti a noi dalle più antiche civiltà dotate di lingua scritta. La crittografia può essere definita come la disciplina che studia le diverse possibili tecniche di cifratura, allo scopo di valutarne l'effettiva sicurezza e di introdurne di più efficaci. Se per secoli, e forse tuttora nella percezione di molti, la pratica della crittografia è stata strettamente associata ad aspetti lontani dalla vita ordinaria, come lo spionaggio (militare, diplomatico, industriale), al giorno d'oggi, in era telematica, ciascuno di noi ne fa uso quotidianamente e probabilmente inconsapevolmente ogni volta che utilizza servizi come il bancomat, la posta elettronica o il commercio on-line, o magari quando assiste a programmi televisivi a pagamento.

I metodi crittografici più tradizionali, quelli a chiave privata, gli unici in uso sino a tempi molto recenti, si possono descrivere come il proteggere un messaggio

chiudendolo in un cofanetto munito di lucchetto; il mittente ed il destinatario (e nessun altro) sono in possesso di una chiave che permette di chiudere (cifrare) ed aprire (decifrare) il lucchetto. Uno dei punti deboli di questo tipo di crittografia è che in una certa fase iniziale, mittente e destinatario hanno dovuto scambiarsi la chiave (segreta) di cifratura, cosa che non è sempre possibile realizzare in modo del tutto sicuro. Inoltre, in un sistema con molti utenti, ciascuno dei quali voglia poter comunicare in modo riservato con ciascun altro (cosa spesso necessaria in tante moderne applicazioni), è necessario un altissimo numero di chiavi: il calcolo combinatorio mostra che servono $\frac{N(N-1)}{2}$ chiavi distinte per un sistema con N utenti (ad esempio, quasi due milioni di chiavi per 2000 utenti). Produrre e gestire tante chiavi può creare grandi, talvolta insuperabili, difficoltà pratiche. La crittografia a chiave pubblica permette di eliminare il problema alla radice, facendo del tutto a meno di chiavi segrete condivise. Illustriamo l'idea con un esempio semplice e quindi necessariamente approssimativo.

Supponiamo che Paolo e Francesca siano innamorati ma che il loro amore sia ostacolato e pertanto tenuto segreto. Paolo però vuol far sapere a Francesca di amarla. Le manda così un cofanetto contenente un messaggio segreto e chiuso con un lucchetto. Francesca riceve il cofanetto, applica un altro lucchetto e rispedisce il cofanetto a Paolo. Paolo riceve il cofanetto ed apre il lucchetto da lui applicato all'inizio, quindi rimanda il cofanetto a Francesca. Francesca riceve il cofanetto con il solo lucchetto da lei applicato. Può finalmente aprirlo e leggere il messaggio segreto di Paolo (vedi figura).



Traduciamo in termini matematici l'idea del messaggio d'amore e del lucchetto. Paolo vuole inviare a Francesca il numero 345. Lo moltiplica per il numero P segreto (noto solo a lui) ed invia il risultato a Francesca, la quale a sua volta moltiplica il numero ricevuto per il numero F segreto (noto solo a lei). Francesca invia quindi a Paolo il numero $345 \times P \times F$. Paolo divide quanto ricevuto per P ed invia il risultato a Francesca, la quale dividendo tutto per F , potrà finalmente leggere il numero 345 che Paolo voleva trasmetterle (vedi Figura 5). Per inciso, i numeri P e F sono scelti primi e grandi. Da cui l'interesse per la ricerca di numeri

primi sempre più grandi.

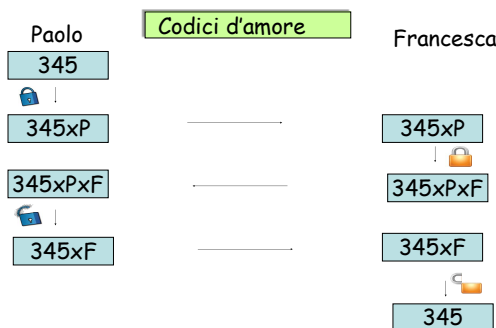
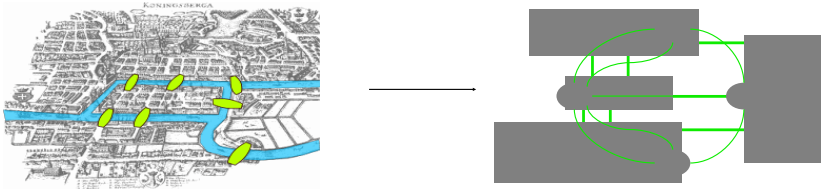


Figura 5: *Messaggio segreto matematico*

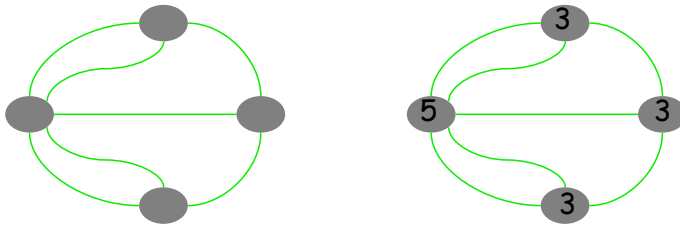
L'esempio che abbiamo appena visto si fonda sul fatto che le operazioni di moltiplicazione e divisione sono l'una inversa dell'altra. I moderni sistemi crittografici usano chiaramente funzioni matematiche più complesse, ma l'idea di base è la stessa: bisogna trovare una funzione invertibile f (da usare per la cifratura) in modo tale che, dato un qualunque messaggio m , sia semplice il calcolo di $m' = f(m)$ (il messaggio cifrato) ma, viceversa, qualunque algoritmo che permetta di ricavare m da m' senza disporre di un'informazione extra (la chiave segreta) richieda troppe risorse e tempo di esecuzione troppo lungo per essere effettivamente utilizzabile. Esistono diversi sistemi crittografici a chiave pubblica, quasi tutti basati sulla matematica discreta e molti ricercatori in matematica sono attualmente impegnati nel cercare di dimostrare (o smentire) la sicurezza di sistemi crittografici a chiave pubblica, nel renderli più efficienti, nell'inventarne di totalmente nuovi.

12) Il problema dei ponti di Königsberg

La città di Königsberg, famosa per aver dato i natali al filosofo Immanuel Kant (1724-1804), è percorsa da due rami confluenti del fiume Pregel e presenta due estese isole che sono connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti. Nel corso dei secoli è stata più volte proposta la questione se sia possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversi ogni ponte una e una volta soltanto e tornare al punto di partenza. Nel 1736 Leonhard Euler affrontò tale problema, dimostrando che la passeggiata ipotizzata non era possibile. Eulero rimpiazza ogni area urbana con un punto, chiamato vertice o nodo, ed ogni ponte con un segmento di linea, chiamato arco o collegamento. Ad ogni nodo è associato un grado pari al numero di archi che arrivano al nodo. Nasce la teoria dei grafi.



Un nodo può essere di grado pari o dispari. Eulero dimostra il seguente risultato: un qualsiasi grafo connesso è percorribile se e solo se tutti i suoi nodi sono di grado pari o se vi sono solo due nodi di grado dispari. Il grafo di Königsberg ha tutti i nodi dispari quindi non è un grafo percorribile.



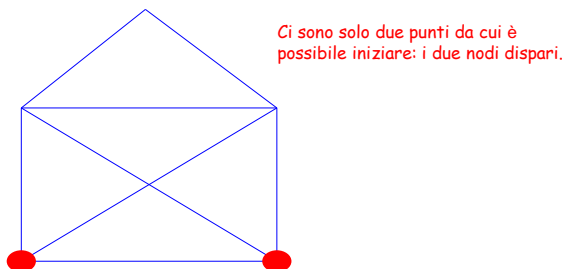
A questo punto ci possiamo chiedere quanti ponti bisogna costruire (oltre quelli esistenti) perché diventi possibile percorrere la passeggiata di Königsberg. Grazie al teorema di Eulero la risposta è un gioco da ragazzi. È infatti sufficiente costruire un solo ponte!



Tutti i nodi sono di
grado dispari

Solo due nodi sono di
grado dispari

Eulero dimostra anche che, se non vi sono nodi di grado dispari, si può cominciare da un qualunque nodo, percorrere l'intero grafo e tornare al nodo di partenza. Se invece vi sono due nodi di grado dispari, è necessario partire da uno di essi e terminare nell'altro. Quest'ultima considerazione ci permette di risolvere un vecchio giochino noto a tutti sin dalle scuole elementari: tracciare il seguente disegno senza mai sollevare la penna dal foglio o ricalcare quanto già disegnato.



13) L'albergo infinito

La città di Königsberg è anche famosa per aver dato i natali ad uno dei più eminenti ed influenti matematici a cavallo tra XIX e XX secolo: David Hilbert (1862-1943).

In un famoso paradosso Hilbert immagina un hotel con infinite stanze (qui ed in seguito parleremo di infiniti numerabili!), tutte occupate, ed afferma che qualsiasi sia il numero di altri ospiti che sopraggiungano, sarà sempre possibile ospitarli tutti, anche se il loro numero è infinito. Nel caso semplice, arriva un singolo nuovo ospite. Il furbo albergatore sposterà tutti i clienti nella camera successiva (l'ospite della 1 nella 2, quello della 2 nella 3, etc.); in questo modo, benché l'albergo fosse pieno, è comunque possibile sistemare il nuovo ospite nella camera 1.

Un caso meno intuitivo si ha quando arrivano infiniti nuovi ospiti. Sarebbe possibile procedere nel modo visto in precedenza, ma solo scomodando infinite volte gli ospiti (già spazientiti dal precedente spostamento): sostiene allora Hilbert che la soluzione sta semplicemente nello spostare ogni ospite nella stanza con numero doppio rispetto a quello attuale (dalla 1 alla 2, dalla 2 alla 4, etc.), lasciando ai nuovi ospiti tutte le camere con i numeri dispari, che sono essi stessi infiniti, risolvendo dunque il problema. Gli ospiti sono tutti dunque sistemati, benché l'albergo fosse pieno.

Ancora più difficile: ci sono infiniti alberghi con infinite stanze tutti al completo. Tutti gli alberghi chiudono, tranne uno. Tutti gli ospiti vogliono alloggiare nell'unico albergo rimasto aperto. Sarebbe possibile procedere come prima, ma solo scomodando infinite volte gli ospiti, invece? Possiamo pensare di assegnare ad ogni ospite una coppia di numeri (n, m) in cui n indica l'albergo di provenienza

e m la relativa stanza. Gli ospiti sono quindi etichettati nel modo seguente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (1, 1) & (1, 2) & \cdots & (1, m) & \cdots & & \\
 (2, 1) & (2, 2) & \cdots & (2, m) & \cdots & & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 (n, 1) & (n, 2) & \cdots & (n, m) & \cdots & & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot &
 \end{array}$$

A questo punto basterà assegnare le nuove stanze agli ospiti secondo un criterio ordinato, ad esempio per diagonali:

$$\begin{array}{l}
 (1, 1) \rightarrow 1; \quad (2, 1) \rightarrow 2; \quad (1, 2) \rightarrow 3; \quad (3, 1) \rightarrow 4; \quad (2, 2) \rightarrow 5 \\
 (1, 3) \rightarrow 6; \quad (4, 1) \rightarrow 7; \quad \dots
 \end{array}$$

Il merito di questo paradosso, nonostante sia piuttosto elementare, è quello di aver contribuito all'epoca a far comprendere ai matematici (e ancora oggi ai non addetti ai lavori) la differenza profonda e sostanziale tra gli insiemi finiti e infiniti. E se siamo stati abbastanza chiari nella nostra esposizione, a questo punto ogni lettore sarà in grado di rispondere al seguente quesito:

“È stata organizzata una festa per gli infiniti ospiti. Ad ognuno è stato assegnato un posto a tavola. E non sono rimasti posti vuoti. Il cuoco ha preparato esattamente una porzione di gelato a testa. Eppure ogni ospite ne ha avute due. Come mai?”

Concludiamo la nostra breve nota con due famosi problemi, i cui sviluppi in campo matematico ancora oggi occupano i giorni (e le notti) di molti ricercatori, noi compresi.

13) Il taglio della torta

È sabato e la signora Rossi ha preparato una torta di forma quadrata per la domenica. La famiglia Rossi è composta da quattro persone e dividere la torta in quattro parti uguali è un gioco da ragazzi. Ma a casa Rossi quel sabato sera sopraggiunge la nonna. “Poco male” pensa il signor Rossi “dividere la torta in cinque parti uguali non è una cosa ardua”. Non aveva però fatto i conti con la golosità della nonna che durante la notte non resiste alla tentazione di mangiare una porzione di torta. “Come possiamo fare ora?” (vedi Figura 6)

Nello stesso ordine di idee rientra il seguente quesito: qual è il taglio più corto che divide una figura piana in due parti di ugual misura?



Figura 6: A destra la forma geometrica della torta privata della fetta mangiata dalla nonna

In tutti gli esempi riportati in Figura 7 il taglio più corto è sempre ortogonale al bordo! Nel caso di un triangolo equilatero (vedi Figura 8) il taglio più corto non è un segmento, bensì un arco di cerchio ortogonale al bordo.

Esistono poi insiemi speciali, detti insiemi di Zindler, in cui tutti i tagli dritti che bisecano l'insieme hanno uguale lunghezza, indipendentemente dalla direzione scelta (vedi Figura 9). Il taglio più corto che biseca l'insieme è ancora una volta un arco di cerchio ortogonale al bordo. Ma la speciale proprietà degli insiemi di Zindler prima citata comporta una serie di sorprese per i non addetti ai lavori. Per esempio, sappiamo che un tronco d'albero a sezione circolare che galleggia per metà fuori dall'acqua è in equilibrio in ogni posizione. Esistono altre sezioni oltre quella circolare per cui è vero lo stesso? Sì! Ogni volta che prendiamo come sezione un insieme di Zindler il tronco sarà in equilibrio indipendentemente dalla posizione.

14) Disuguaglianza isoperimetrica

Cosa hanno in comune le mappe di Capua, Shanghai, Mosca, Bruxelles, Gerusalemme (vedi Figure 10-11)? Cosa accade in presenza di una riva a Colonia, Amsterdam o Parigi (vedi Figura 12)? Ed in casi più complicati, come a Dresda, Costantinopoli o New York (vedi Figura 13)?

La questione alla base di tutte le mappe che abbiamo visto è la stessa: quale forma deve assumere un nucleo urbano in modo da avere estensione massima a parità di perimetro (e dunque di cinta muraria)? Tutti ricordiamo la leggenda di Didone sulla fondazione di Cartagine così come è raccontata nel Libro I dell'Eneide di Virgilio:

*“Devenere locos ubi nunc ingentia cernis
Moenia sergentemque novae Karthaginis arcem,
mercatique, solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo.
Sed vos qui tandem? quibus aut venistis ab oris
quove tenetis iter?”*

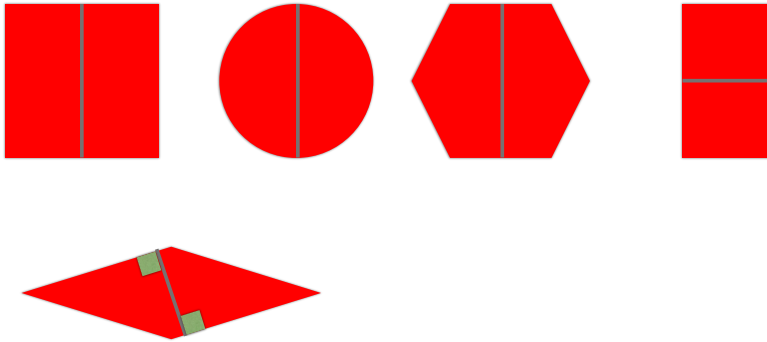


Figura 7: *Il taglio più corto*

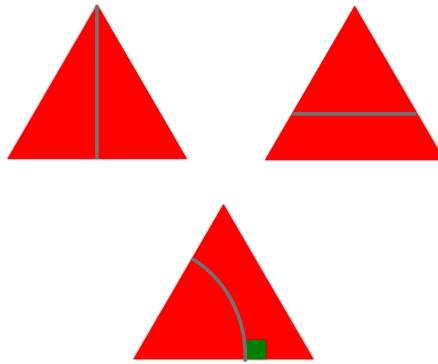


Figura 8: *Il taglio più corto è sempre ortogonale al bordo*

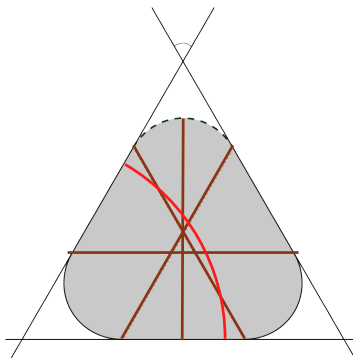


Figura 9: *Un insieme di Zindler*



Figura 10: *Da sinistra a destra: Capua, Shanghai*



Figura 11: *Da sinistra a destra: Mosca, Bruxelles, Gerusalemme*



Figura 12: *Da sinistra a destra: Colonia, Amsterdam, Parigi*

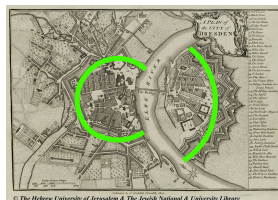


Figura 13: *Da sinistra a destra: Dresda, Costantinopoli, New York*

“Giunsero in questi luoghi, ov’or vedrai
sorger la gran cittade e l’alta ròcca
de la nuova Cartago, che dal fatto
Birsà nomossi, per l’astuta merce
che, per fondarla, fèr di tanto sito
quanto cerchiar di bue potesse un tergo.” (traduzione di Annibal Caro, XVI secolo)

Alla base della fondazione di Cartagine è la celebre disuguaglianza isoperimetrica che nel piano può essere scritta come segue. Detti A l’area di una regione piana limitata e P il suo perimetro, allora

$$P^2 \geq 4\pi A. \quad (2)$$

Chiaramente se la regione piana è un cerchio di raggio r , allora $A = \pi r^2$ e $P = 2\pi r$, sicché la disuguaglianza vale come uguaglianza $P^2 = 4\pi A$. Ciò significa che tra le regioni piane di perimetro fissato il cerchio ha area massima o, equivalentemente, tra le regioni piane di area fissata il cerchio ha perimetro minimo.

La disuguaglianza (2) è solo il primo esempio di una ricca serie di disuguaglianze cosiddette isoperimetriche: si tratta di massimizzare (o minimizzare) una fissata quantità geometrica o fisica con un vincolo dimostrando che tale massimo (o minimo) è raggiunto quando il dominio è circolare o sferico. Probabilmente la manifestazione fisica più famosa della disuguaglianza isoperimetrica tridimensionale è la forma di una bolla di sapone. Una bolla ha tipicamente forma sferica. Poiché la quantità di aria racchiusa dalla bolla è fissa (il che significa dal punto di vista matematico che il volume dell’insieme è fissato), la tensione superficiale spinge la bolla ad assumere la forma che minimizza la superficie della bolla (cioè l’area della superficie dell’insieme), e quindi la forma sferica.

La validità delle proprietà isoperimetriche di cerchio e sfera erano note sin dall’antichità, ma la loro dimostrazione rigorosa ed esauriente dal punto di vista matematico è molto recente. Basti pensare che per avere una nozione di perimetro valida per insiemi molto frastagliati abbiamo dovuto aspettare fino al secolo scorso, finché non è comparso sulla scena internazionale un genio napoletano di nome Renato Caccioppoli. E quindi un genio leccese di nome Ennio de Giorgi. Ma questa è un’altra storia.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Beutelspacher, *Le Meraviglie della matematica. Sessantasei esperienze spiegate attraverso i numeri*, Ponte alle Grazie, Milano, 2008.
- [2] C. B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, 1980.

- [3] M. Clark, *I paradossi dalla A alla Z*, Raffaello Cortina Editore, Milano, 2004.
- [4] G. Cohen (a cura di), *Pitagora si diverte 1. 77 giochi matematici*, Bruno Mondadori, Milano, 2002.
- [5] G. Cohen (a cura di), *Pitagora si diverte 2. 73 giochi matematici*, Bruno Mondadori, Milano, 2006.
- [6] G. Cohen (a cura di), *Pitagora continua a divertirsi. 70 giochi matematici*, Bruno Mondadori, Milano, 2006.
- [7] G. Cohen (a cura di), *Le sfide di Pitagora*, Bruno Mondadori, Milano, 2007.
- [8] R. Courant - H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Bollati Boringhieri, Torino, 1985.
- [9] L. Cresci, *I numeri celebri*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000.
- [10] M. Danesi, *Labirinti, quadrati magici e paradossi logici. I dieci più grandi enigmi matematici di tutti i tempi*, Edizioni Dedalo, Bari, 2004.
- [11] F N. Falletta, *Il libro dei paradossi*, Longanesi, Milano, 2003.
- [12] M. Gardner, *Enigmi e giochi della Matematica*, Rizzoli, Milano, 2001.
- [13] N. Geronimi, *Giochi matematici del medioevo*, Bruno Mondadori, Milano, 2006.
- [14] D. Guedj, *Il teorema del pappagallo*, Longanesi, Milano, 2011.
- [15] M. Haddon, *Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*, Einaudi, Torino, 2003.
- [16] P. Hoffman, *L'uomo che amava solo i numeri*, Mondadori, Milano, 1999.
- [17] F. Honsell, *L'algoritmo del parcheggio*, Mondadori, Milano, 2007.
- [18] T. Pappas, *Le gioie della Matematica*, Franco Muzzio Editore, Padova, 1995.
- [19] I. Stewart, *Come tagliare una torta e altri rompicapi matematici*, Einaudi, Torino, 2008.
- [20] I. Stewart, *L'assassino dalle calze verdi e altri enigmi matematici*, Longanesi, Milano, 2006.
- [21] G. Trombetti - G. Zollo, *I segreti di Pitagora*, Bruno Mondadori, Milano, 2010.

- [23] Il Mattino, articoli vari.
- [24] G. Trombetti, *Probabilmente*, Ambiente Rischio Comunicazione 4 (2012), pp. 12–15.
- [25] Progetto Polymath: <http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/>
- [26] Rudi Mathematici: <http://www.rudimathematici.com/>
- [27] MaddMaths: <http://maddmaths.simai.eu>
- [28] Base 5, appunti di matematica ricreativa: <http://utenti.quipo.it/base5/>

Insegnamento-Apprendimento della Probabilità: Schema di Bernoulli e Metodo Monte Carlo

Aniello Buonocore e Luigia Caputo

1 Introduzione

Nel 1949, Nicholas C. Metropolis e Stanislaw Ulam pubblicarono sul *Journal of the American Statistical Association* un articolo dal titolo “The Monte Carlo Method”. Roger Eckhardt ricorda come Ulam abbia avuto l’idea del metodo.

I primi ragionamenti e i primi tentativi che ho svolto per mettere a punto [il metodo Monte Carlo] sono stati suggeriti da una domanda che mi sovvenne nel 1946 mentre ero convalescente a causa di una malattia e [, per trascorrere il tempo,] giocavo al solitario. La domanda che mi posi riguardava la probabilità di riuscita del solitario di Canfield [Richard A. Canfield, proprietario di una sala da gioco] eseguito con 52 carte.¹ Dopo aver trascorso molto tempo a cercare di determinare tale probabilità utilizzando esclusivamente il calcolo combinatorio, mi sono chiesto se un metodo più pratico, alternativo al pensiero astratto, potesse essere quello di eseguire il solitario cento volte e semplicemente contare il numero di quelli riusciti.

Un quarto di secolo dopo, il matematico russo Ilya M. Sobol nella prefazione di un suo libro avente lo stesso titolo dell’articolo di Metropolis e Ulam scrisse la seguente osservazione.

Il termine “Monte Carlo” trae origine dal nome della città del Principato di Monaco, famosa per il suo casinò. Uno dei dispositivi meccanici più semplici per ottenere quantità casuali è quello della roulette. < ... > Forse vale la pena di rispondere qui ad una domanda frequente: il metodo Monte Carlo è di aiuto per vincere alla roulette? La risposta è che non è così, e non è nemmeno un tentativo di farlo.

Ancora, nel primo capitolo del libro *Lezioni sul Metodo Monte Carlo* di Rodolfo Rosa si legge la seguente precisazione.

¹Per intenderci quelle di un mazzo francese con i quattro semi cuori, quadri, fiori e picche.

E che, in spirito, coloro che l'inventarono fossero ben lontani dall'atmosfera di un casinò appare evidente se si pensa, dove, quando, e perché tale metodo fu messo a punto: a Los Alamos, durante la guerra. Fu là che il metodo Monte Carlo trovò la prima applicazione < ... >.²

Appurata, allora, la finalità prettamente scientifica del metodo bisogna dire ad onor del vero che, sebbene a Los Alamos fu Ulam a suggerire il metodo Monte Carlo per il calcolo di complicati integrali presenti nella teoria delle reazioni nucleari, Enrico Fermi ed altri avevano già utilizzato un metodo simile in precedenza. Infatti, nell'articolo "The beginning of the Monte Carlo Method" pubblicato sulla rivista *Los Alamos Science* nel 1987, Metropolis racconta la nascita del metodo ad opera di Enrico Fermi.

Fermi ideò, non dandogli un nome, quello che attualmente viene chiamato metodo Monte Carlo durante i suoi studi romani sulle tecniche per il rallentamento dei neutroni.

Metropolis cita "From X-Rays to Quarks" di Emilio Segré ma per maggiori dettagli conviene riferirsi al rapporto del Los Alamos Scientific Laboratory dal titolo "Fermi invention rediscovered at LASL" pubblicato sulla rivista *The Atom* nel 1966.

Dal punto di vista della didattica della matematica ci sembra opportuno riportare uno stralcio dall'articolo "Experiments and models for the Monte Carlo method" di Alwin Walther pubblicato sugli atti del *Symposium on Monte Carlo methods* edito nel 1954 da Herbert A. Meyer. Qui, per chiarezza si fa notare che la parola "modelli" presente nel titolo si riferisce all'accezione di dispositivi (fisici o elettronici) atti a produrre il "caso".

Il lavoro di docente all'Institute for Practical Mathematics di Darmstadt ... è caratterizzato da quattro principi:

- 1) Sintesi tra matematica pura e applicata.
- 2) Messa in rilievo e approfondimento delle idee di base. In altri termini: lo studente dovrebbe comprendere i fondamenti semplici e lavorare il più possibile con essi.
- 3) Far leva sull'intuito.
- 4) I problemi sono più importanti delle lezioni.

In accordo ai principi 2) e 3) la matematica appare permeata di buon senso. Essa si apprende non solo con il ragionamento logico, ma anche attraverso gli occhi e le mani. Per questi motivi spesso illustriamo i contenuti e i metodi matematici con l'aiuto di esperimenti e modelli.

²L'applicazione a cui fa riferimento Rosa era una delle finalità del *Progetto Manhattan*. La direzione scientifica del progetto era affidata al fisico statunitense Robert Oppenheimer che aveva "reclutato", oltre a Metropolis e Ulam, lo scienziato di origine ungherese John von Neumann che fu uno dei principali sviluppatori del metodo Monte Carlo.

A parere degli autori, è notevole l'analogia con quella che con linguaggio attuale viene chiamata "metodologia laboratoriale" una cui connotazione precisa si può trovare, ad esempio nell'articolo "Insegnamento e apprendimento della matematica e delle scienze sperimentali con metodologia laboratoriale" di Anna Maria Ferluga pubblicato sul numero 3 dei *quaderni CIRD* nel 2011.

Si tratta di un significato che si può far risalire ai principi fondamentali con cui è andato definendosi il movimento della pedagogia innovatrice tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, che aveva contrapposto al modello autoritario prevalente nella scuola pubblica sia in Europa che negli Stati Uniti un ideale educativo che, molto sinteticamente, si può definire di rivendicazione dell'iniziativa e libertà di chi apprende, delle sue motivazioni genuine o interessi. Che si parlasse di pedagogia attiva o progressiva o di scuole nuove, si esprimeva comunque una esigenza fondamentale che è anche alla base della metodologia laboratoriale: è bene che gli allievi siano attivi e protagonisti della situazione educativa. Chi apprende, pertanto, è opportuno si trovi in una situazione di protagonista attivo e non di recettore passivo delle idee di chi insegna. A questa esigenza in alcune di quelle correnti di pensiero educativo si aggiungeva un altro elemento che si ritrova nella metodologia laboratoriale, e cioè il valore della interazione tra pari accanto a quella dell'allievo con l'insegnante. All'esigenza della massima concentrazione attiva nei processi di apprendimento da parte dell'allievo si accompagna la complementarizzazione, se non la sostituzione, del rapporto insegnante-allievo con il rapporto tra i pari, e quindi il lavoro di gruppo. Si richiede, in altre parole, che gli allievi abbiano con l'insegnante un rapporto tale da diventare protagonisti attivi, laddove l'insegnante diviene un appoggio al processo di apprendimento dell'allievo e della sua collaborazione con il gruppo.

Prima di mostrare un possibile schema generale del metodo Monte Carlo e alcune sue istanze di applicazione,³ si è preferito soffermarsi a lungo, per la sua importanza nell'ambito della didattica della probabilità, sullo schema di Bernoulli. Infatti, lo scopo precipuo del presente articolo è quello di mostrare che l'accoppiata schema di Bernoulli e metodo Monte Carlo può fornire numerosi spunti e contesti per percorsi didattici atti a sviluppare, ad esempio, i punti focali relativi alla probabilità che compaiono nelle varie *tavole degli apprendimenti* elaborate negli ultimi anni da gruppi numerosi di docenti della Scuola Secondaria Superiore in collaborazione con la MATHEISIS.⁴

³Relativamente allo schema generale, alcune definizioni e importanti risultati teorici devono essere richiamati e ciò è fatto, per non appesantire la lettura, in fondo all'articolo.

⁴Esse, si possono trovare sul portale dell'Associazione.

2 Schema di Bernoulli

Lo *schema di Bernoulli* (o delle *prove ripetute*) riveste notevole importanza nell'ambito del metodo Monte Carlo. Esso, consiste nella ripetizione, un numero indefinito di volte e in condizioni di indipendenza, di un esperimento aleatorio $\mathcal{E}$ e l'interesse è posto nella verifica della occorrenza di un prefissato evento S che è detto *successo*. A parere degli autori, ci sono almeno altri due punti di forza dello schema di Bernoulli che vale la pena di mettere in evidenza:

- (a) svariate applicazioni, attinenti a contesti molto distanti tra loro, sono in realtà tutte riconducibili a tale modello probabilistico;
- (b) in esso, con l'utilizzo di una strutturazione matematica di base, è possibile introdurre alcuni notevoli numeri aleatori discreti per i quali la determinazione delle rispettive leggi potrebbe essere utilizzata per la didattica della probabilità in condizioni di indipendenza stocastica.

Inoltre, alcuni problemi che hanno caratterizzato l'evoluzione del percorso culturale fino a raggiungere l'attuale forma assiomatica del calcolo delle probabilità,⁵ trovano nello schema di Bernoulli la loro naturale sistemazione.

In questa sezione si utilizzeranno le posizioni della Sezione 9 e le definizioni (48) (*media di ordine r*) e (49) (*varianza*).

Definizione 1. Indicata con $0 < p < 1$ la probabilità dell'evento successo S , il numero X che assume il valore 1 se, in seguito ad una sola effettuazione di $\mathcal{E}$, si presenta S oppure il valore 0 se si presenta il suo negato $\bar{S}$, è chiamato *prova* e si dice che esso ha legge di Bernoulli:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X(\{0\}) &:= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{S}) = 1 - p, \\ \mathbb{P}_X(\{1\}) &:= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(S) = p.\end{aligned}$$

In breve si scrive che $X \sim \mathcal{B}(p)$; si osservi che $S_X = \{0, 1\}$.

Il caso $p = 1$ si riferisce ad un numero aleatorio che assume quasi certamente il valore 1; si dice che X ha legge degenere e si scrive $X \sim \mathcal{D}(1)$. Analogamente si tratta il caso $p = 0$: $X \sim \mathcal{D}(0)$.⁶ $\triangleleft$

Dal fatto che

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X^r] = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1^r \cdot \mathbb{P}(X = 1) = p,$$

⁵Il problema della *ripartizione della posta* per il quale si consiglia la lettura dell'articolo "Il Problema delle Parti: Prassi Didattica e Storia della Matematica" di Domingo Paola; il problema *del cavaliere De Méré* per il quale si consiglia la lettura di "Il calcolo della Probabilità e la Teoria dei Giochi - Parte 2" di Maria Maddalena Bovetti (che si può trovare sul sito PRISTEM); in esso viene messo in luce l'*errore di ragionamento in media commesso dal giocatore*; il problema *del collezionista*.

⁶Più in generale $\mathcal{D}(x_0)$ designa un legge degenere corrispondente ad un numero aleatorio che assume quasi certamente il valore x_0 .

segue, in particolare, che

$$\mathbb{E}[X] = p \quad \text{e} \quad \mathbb{D}^2[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = p - p^2 = p(1 - p). \quad (1)$$

Definizione 2. Indicata con $0 < p < 1$ la probabilità dell'evento successo S e con n un intero positivo, la somma delle prime n prove

$$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

ha legge *binomiale*:

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \equiv S_{S_n}, \quad \mathbb{P}_{S_n}(\{k\}) := \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (2)$$

In breve si scrive che $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Ovviamente $\mathcal{B}(1, p) \equiv \mathcal{B}(p)$. $\triangleleft$

Risulta

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = np,$$

e, tenendo conto dell'indipendenza delle prove,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2[S_n] &= \mathbb{D}^2[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] \\ &= \mathbb{D}^2[X_1] + \mathbb{D}^2[X_2] + \cdots + \mathbb{D}^2[X_n] = np(1 - p). \end{aligned}$$

Osservazione 1. Per ottenere la (2) basta ragionare al seguente modo. In primo luogo si ricordi che la probabilità dell'unione di un numero finito di eventi a due a due incompatibili è uguale alla somma delle rispettive probabilità; in particolare se tali eventi risultano avere la stessa probabilità allora la probabilità dell'unione è data dal prodotto del numero degli eventi per la probabilità del primo di essi. Dopo di ciò, sia $k \in S_{S_n}$; per la realizzazione dell'evento $\{S_n = k\}$ sono necessari k successi e $n - k$ insuccessi. Si consideri l'evento E che nelle prime k prove si è osservato il successo S e nelle restanti $n - k$ si è osservato l'insuccesso $\bar{S}$. Per l'asserita indipendenza delle prove e per la (1) si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \cdots \cap \{X_k = 1\} \cap \{X_{k+1} = 0\} \cap \cdots \cap \{X_n = 0\}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdots \mathbb{P}(X_k = 1) \cdot \mathbb{P}(X_{k+1} = 0) \cdots \mathbb{P}(X_n = 0) \\ &= p^k (1 - p)^{n-k}. \end{aligned}$$

D'altra parte, è facile rendersi conto che la probabilità di un qualsiasi altro evento che per la sua realizzazione vuole k successi ed $n - k$ insuccessi vale $p^k (1 - p)^{n-k}$. Ognuno di questi m eventi è individuato da una k -pla di elementi distinti dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ che specifica quali sono le prove che valgono 1. Dal momento che l'ordine degli elementi nella k -pla non è rilevante si conclude che $m = \binom{n}{k}$. Resta in tal modo spiegata la (2).

Definizione 3. Indicata con $0 < p < 1$ la probabilità dell'evento successo S , il numero T che conta il numero delle ripetizioni dell'esperimento fino ad osservare S per la prima volta ha legge *geometrica*:

$$\forall n \in \{1, 2, \dots\} \equiv S_T, \quad \mathbb{P}_T(\{n\}) := \mathbb{P}(T = n) = p(1 - p)^{n-1}. \quad (3)$$

In breve si scrive che $T \sim \mathcal{G}(p)$. ◁

Dal momento che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} = \frac{1}{p},$$

si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= \sum_{n=1}^{\infty} np(1 - p)^{n-1} \\ &= p \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} + p(1 - p) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} \\ &\quad + p(1 - p)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} + \dots \\ &= \frac{p}{p} + \frac{p(1 - p)}{p} + \frac{p(1 - p)^2}{p} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} = \frac{1}{p}. \end{aligned} \quad (4)$$

Più articolata è, invece, la dimostrazione che

$$\mathbb{E}[T^2] = \frac{2 - p}{p^2}, \quad (5)$$

dalla quale si ottiene:

$$\mathbb{D}^2[T] = \frac{2 - p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1 - p}{p^2}. \quad (6)$$

Osservazione 2. Per ottenere la (3) basta ragionare al seguente modo. Sia $n \in S_T$; per la realizzazione dell'evento $\{T = n\}$ sono necessari $n - 1$ successi nelle prime $n - 1$ ripetizioni di $\mathcal{E}$ e il successo nella prova successiva. Quindi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}(\{X_1 = 0\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} = 0\} \cap \{X_n = 1\}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdots \mathbb{P}(X_{n-1} = 0) \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= (1 - p)^{n-1} \cdot p = p(1 - p)^{n-1}. \end{aligned}$$

Resta in tal modo spiegata la (3).

Definizione 4. Indicata con $0 < p < 1$ la probabilità dell'evento successo S e con k un intero positivo, il numero W_k che conta il numero delle ripetizioni dell'esperimento fino ad osservare il k -mo successo per la prima volta ha legge di *Pascal*:

$$\forall n \in \{k, k+1, \dots\} \equiv S_{W_k},$$

$$\mathbb{P}_{W_k}(\{n\}) := \mathbb{P}(W_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (7)$$

In breve si scrive che $W_k \sim \mathcal{BN}(k, p)$.⁷

◁

Ora, si indichi con T_1 il numero delle ripetizioni di $\mathcal{E}$ contate a partire da 1 necessarie ad osservare S per la prima volta, con T_2 il numero delle ripetizione di $\mathcal{E}$ contate a partire da T_1 necessarie ad osservare nuovamente S per la prima volta, con T_3 il numero delle ripetizione di $\mathcal{E}$ contate a partire da T_2 necessarie ad osservare nuovamente S per la prima volta e, così via, con T_k il numero delle ripetizione di $\mathcal{E}$ contate a partire da T_{k-1} fino ad osservare nuovamente S per la prima volta. Da queste posizioni, è agevole verificare che:

$$W_k := T_1 + T_2 + \dots + T_k;$$

quindi

$$\mathbb{E}[W_k] = \mathbb{E}[T_1 + T_2 + \dots + T_k] = \mathbb{E}[T_1] + \mathbb{E}[T_2] + \dots + \mathbb{E}[T_k] = \frac{k}{p},$$

e, tenendo conto dell'indipendenza delle prove,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2[W_k] &= \mathbb{D}^2[T_1 + T_2 + \dots + T_k] = \mathbb{D}^2[T_1] + \mathbb{D}^2[T_2] + \dots + \mathbb{D}^2[T_k] \\ &= k \frac{1-p}{p^2}. \end{aligned}$$

Osservazione 3. Per ottenere la (7) basta ragionare al seguente modo. Sia $n \in S_{W_k}$: dire che si è verificato l'evento $\{W_k = n\}$ equivale a dire che il k -mo successo si è presentato per la prima volta alla n -ma ripetizione di $\mathcal{E}$. Ne discende che si è verificato l'evento successo alla n -ma ripetizione e contestualmente fino alla $(n-1)$ -ma ripetizione si sono osservati $(k-1)$ successi: $\{X_n = 1\}$ e $\{S_{n-1} = k-1\}$. In definitiva:

$$\{W_k = n\} = \{X_n = 1\} \cap \{S_{n-1} = k-1\}.$$

Dopo di ciò, tenendo conto che la prova X_n è indipendente dalle prove precedenti e quindi anche da S_{n-1} , si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_k = n) &= \mathbb{P}(\{X_n = 1\} \cap \{S_{n-1} = k-1\}) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 1) \cdot \mathbb{P}(S_{n-1} = k-1) \\ &= p \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

⁷ $\mathcal{BN}$ sta per *Binomiale Negativa* che è un altro modo per denominare la legge di Pascal.

3 Schema generale del metodo Monte Carlo

Per l'esigenza di leggibilità di questa sezione si è deciso di rimandare nelle sezioni 9 e 10 le posizioni, le definizioni e i risultati teorici necessari alla descrizione dello schema generale di una qualsiasi applicazione del metodo Monte Carlo.

1. Una quantità m deve essere approssimata con contestuale determinazione dell'accuratezza.
2. Bisogna individuare un numero aleatorio X con i seguenti requisiti: (i) X è osservabile (mediante un apposito dispositivo fisico oppure utilizzando un programma di calcolo) un numero indefinito di volte $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ e queste *osservazioni* sono tali che ciascuna di esse è indipendente dalle precedenti; (ii) $\mathbb{E}[X] = m$; (iii) $\mathbb{D}^2[X] \equiv v^2 < +\infty$. Nel seguito ci si riferirà a X come alla *genitrice* delle osservazioni e a x come alla realizzazione di essa in seguito all'effettuazione dell'esperimento sottostante.⁸
3. L'approssimazione di m è fornita dalla media campionaria delle prime n osservazioni di X ,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n,$$

in quanto la legge forte dei grandi numeri garantisce che,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = m\right) = 1.$$

4. Risultando

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[\bar{X}_n] = m, \quad \mathbb{D}^2[\bar{X}_n] = \frac{v^2}{n},$$

in virtù del teorema centrale di convergenza, dell'Osservazione 10 e della (47), si ha:

$$\forall n > 30, \quad \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - m| < \frac{v}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.^9 \quad (8)$$

In sintesi, per ogni n intero e per ogni α reale compreso tra 0 e 1, la media campionaria $\bar{X}_n$ fornisce un'approssimazione per la quantità m e con fiducia pari $1 - \alpha$ si ha che il massimo errore che si può commettere è pari a $\frac{v}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$.

Osservazione 4. Relativamente alla determinazione dell'errore massimo nasce l'esigenza di stimare la varianza v^2 della genitrice. A tale scopo, posto

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad \bar{X}_n^{(k)} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k,^{10} \quad (9)$$

⁸La stessa convenzione è adottata per tutti i numeri aleatori considerati; ad esempio, x_3 indica una realizzazione di X_3 e $\bar{x}_n$ una realizzazione di $\bar{X}_n$.

⁹Si osservi che l'approssimazione è dovuta al fatto che, per ogni n finito, il numero aleatorio $(\bar{X}_n - m)/(v/\sqrt{n})$ ha solo approssimativamente legge normale standard.

¹⁰Il numero aleatorio $\bar{X}_n^{(k)}$ è la *media campionaria di ordine k* . Si osservi che $\bar{X}_n^{(1)} \equiv \bar{X}_n$.

si può utilizzare la *varianza campionaria*:

$$S_n^2[X] := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \equiv \frac{n}{n-1} [\bar{X}_n^{(2)} - (\bar{X}_n)^2]. \quad (10)$$

La seconda formulazione di $S_n^2[X]$ è più comoda dal punto di vista computazionale in quanto, man mano che le osservazioni vengono prodotte, si può accumulare contemporaneamente sia la loro somma che la somma dei loro quadrati. $\triangleleft$

Osservazione 5. Se $X \sim \mathcal{B}(p)$, risulta

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad \bar{X}_n^{(k)} \equiv \bar{X}_n.$$

Quindi,

$$\bar{X}_n^{(2)} - (\bar{X}_n)^2 = \bar{X}_n (1 - \bar{X}_n) \Rightarrow \frac{S_n^2[X]}{n} = \frac{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}{n-1}, \quad (11)$$

cosicché è sufficiente accumulare solo la somma delle osservazioni. $\triangleleft$

L'individuazione della genitrice X rappresenta la maggiore difficoltà per la costruzione di un metodo Monte Carlo. Inoltre, dalla (8) si evince che per incrementare l'accuratezza dell'approssimazione di m , a parità del numero di osservazioni, si può agire solo sulla varianza della genitrice. Le tecniche, nell'ambito del metodo Monte Carlo, note come di *riduzione della varianza* sono finalizzate appunto alla ricerca di una genitrice con varianza minore di quella correntemente utilizzata.¹¹ Nulla vieta che la genitrice rimanga la stessa e che la riduzione della varianza sia dovuta solo ad una differente modalità di ottenere le osservazioni (ovvero la *procedura di campionamento*): in un certo senso è come pensare di rendere più *efficienti* le osservazioni. D'altra parte, la stessa (8) mostra che l'accuratezza dipende anche dal numero delle osservazioni. Ogni osservazione, però, comporta un costo e quindi nel valutare l'*efficienza* di un metodo Monte Carlo quello che conta è il prodotto tra il costo unitario di una osservazione e la varianza della genitrice: rendendo opportunamente adimensionali le quantità coinvolte, un metodo con varianza della genitrice pari a 2 e costo di una osservazione pari a 1 è da preferire ad un altro metodo con varianza della genitrice pari a 1 e costo di una osservazione pari a 3.

Osservazione 6. Dal punto di vista del problema didattico la giustificazione della (8) può essere fornita calibrando argomentazioni intuitive e dimostrazioni formali in relazione all'età e al grado degli studenti. Agli allievi del biennio della secondaria superiore, ad esempio, sulla base delle esperienze fatte in laboratorio di fisica relative alla misurazione strumentale di una stessa grandezza, dovrebbe già essere familiare il fatto che la media campionaria $\bar{x}_n$ dei dati ottenuti $x_1, x_2, \dots, x_n$ approssima la misura *vera* x della grandezza con una accuratezza fornita dalla stima dell'errore

¹¹Alcuni autori nell'accezione "Monte Carlo sofisticato" richiedono che sia utilizzata anche una tecnica di riduzione della varianza.

standard:

$$x \approx \bar{x}_n \pm \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (12)$$

A questo livello si potrebbe giustificare su basi esclusivamente intuitive che la fiducia sulla (12) è pari solo al 68%. Invece, per gli studenti delle quarte e quinte classi potrebbe essere obiettivo formativo la comprensione delle tavole riportanti i valori della funzione di distribuzione normale standard. $\triangleleft$

Volendo procedere ad una classificazione possiamo avere situazioni nelle quali un elemento di aleatorietà è insito nel contesto (*Monte Carlo naturale*) e situazioni dove il contesto è prettamente deterministico (*Monte Carlo sofisticato*). Nelle successive sezioni si prenderanno in considerazione istanze di questo secondo tipo.

4 Area di una figura piana

Si desidera approssimare l'area di una figura piana A .¹² Per costruire un metodo Monte Carlo in questa situazione dove non ci sono indicazioni di carattere aleatorio procediamo al seguente modo.

Sia R un rettangolo di base b e altezza h , contenente la figura A . La probabilità p_A dell'evento

$$S_A := \text{"un punto scelto a caso nel rettangolo } R \text{ appartiene alla figura } A",^{13}$$

che rappresenta il successo in questo contesto, è uguale al rapporto tra l'area di A e l'area di R :

$$p_A = \mathbb{P}(S_A) = \frac{\text{area}(A)}{bh}.$$

Indicata con Y la generica prova dello schema di Bernoulli con successo S_A , ossia $Y \sim \mathcal{B}(p_A)$, si consideri come genitrice il numero aleatorio

$$X = bhY. \quad (13)$$

Dalla (13) e dalla (1) si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= bh\mathbb{E}[Y] = bh \cdot p_A = bh \frac{\text{area}(A)}{bh} = \text{area}(A), \\ \mathbb{D}^2[X] &= (bh)^2 \cdot \mathbb{D}^2[Y] = (bh)^2 \cdot p_A(1 - p_A) < +\infty, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = bh \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = bh \bar{Y}_n. \quad (15)$$

¹²In questo articolo per *figura piana* si intende una figura del piano euclideo, limitata e con contorno costituito da una curva chiusa.

¹³In questa e nella successiva sezione il pedice di S è il simbolo che individua la figura piana.

Esempio 1. La procedura descritta nella Sezione 3 può essere eseguita, ad esempio, riportando la figura A sul fondo di una scatola rettangolare, di base b e altezza h , e inserendo all'interno di essa un numero n di granelli aventi dimensioni confrontabili con il tratto di matita usato per delineare il contorno di A . Dopo aver chiuso la scatola con il proprio coperchio, basta agitarla per qualche secondo allo scopo di ottenere la casualità nella dislocazione dei granelli e successivamente contare il numero dei granelli $\sum_{i=1}^n y_i$ presenti in A .¹⁴ ◀

Dopo di ciò, tenendo conto delle (8), (11), (15) e (47) si ha:

$$\text{area}(A) \approx bh \bar{y}_n \pm bh \sqrt{\frac{\bar{y}_n (1 - \bar{y}_n)}{n - 1}} \cdot z_{\alpha/2}, \quad \text{con fiducia } 1 - \alpha. \quad (16)$$

Per quanto riguarda la riduzione della varianza, si osservi che,

$$\begin{aligned} v^2 &= [\text{area}(R)]^2 \cdot p_A(1 - p_A) = [\text{area}(R)]^2 \cdot \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(R)} \left[1 - \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(R)} \right] \\ &= \text{area}(A)[\text{area}(R) - \text{area}(A)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Dalla (17) si vede che la varianza della genitrice si può ridurre al minimo scegliendo

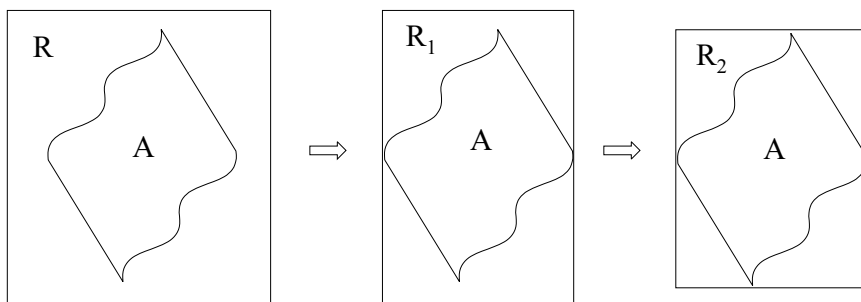


Figura 1: Il grafico illustra come si ottiene la riduzione della varianza nel problema del calcolo dell'area di una figura piana limitata.

un rettangolo che circoscrive la figura A . La Figura 1 illustra lo stesso concetto dal punto di vista dell'efficienza della procedura di campionamento: la generica osservazione consiste nella scelta di un punto casuale interno al rettangolo R e verificare se esso appartiene alla figura A : quindi è del tutto inutile generare punti che giacciono su segmenti paralleli all'altezza (alla base) di R aventi intersezione vuota con A . D'altra parte, il costo unitario per ottenere una osservazione non dipende dal rettangolo che contiene la figura.

Una istanza particolarmente interessante è fornita da una figura B avente area metà di quella del rettangolo che la circoscrive. Infatti in tale situazione, dalla (17) si

¹⁴Nel caso in cui un granello si trova sul contorno di A si può adottare il seguente criterio: esso viene incluso nel conteggio se non è visibile una sua parte esterna al contorno di A .

ottiene che la varianza della genitrice vale

$$v^2 = \mathbb{D}^2[X] = \frac{\text{area}(R)}{2} \left[\text{area}(R) - \frac{\text{area}(R)}{2} \right] = \frac{[\text{area}(R)]^2}{4},$$

cosicch  l'errore massimo nell'approssimazione di $\text{area}(B)$   dato da:

$$\frac{v}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = \frac{bh}{2\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2},$$

da cui

$$\text{area}(B) \approx bh \bar{y}_n \pm \frac{bh}{2\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2}, \quad \text{con fiducia } 1 - \alpha. \quad (18)$$

Non   superfluo rimarcare il fatto che, sia nella (16) che nella (18), $\bar{y}_n$ rappresenta il rapporto tra il numero dei granelli contenuti nella figura e il numero complessivo dei granelli presenti nella scatola.

Esempio 2 (Continuazione Esempio 1). Alcune indicazioni per la costruzione di attivit  didattiche sono le seguenti:

- a) la determinazione di n per rendere praticabile il procedimento;
- b) la scelta della modalit  del conteggio;
- c) l'uso di figure di vario tipo per familiarizzare con la (16) con $z_{\alpha/2} = 1$;
- d) il ridimensionamento del fondo della scatola nel senso della base;
- e) il ridimensionamento del fondo della scatola nel senso dell'altezza;
- f) il riconoscimento della ottimalit  del fondo della scatola come il rettangolo R_2 della Figura 1;
- g) il significato e la scelta di $z_{\alpha/2}$.

Il punto g) del precedente elenco   in stretta connessione con la (18). ◁

5 Ancora sull'area di una figura piana

La messa in pratica della procedura descritta nella precedente sezione con l'ausilio di una sequenza di punti pseudo-casuali (nel qual caso si parla di metodo *pseudo Monte Carlo*) generati con un opportuno programma di calcolo ha una criticit  dovuta al riconoscimento della localizzazione del punto generato (problema del *dentro o fuori*). Ci sono per  due tipi di contorni di figure piane per i quali il problema in questione   facilmente risolvibile: (i) i luoghi geometrici, (ii) tratti limitati del grafico di una funzione $h(\cdot)$ continua e non negativa (l'area corrispondente   quella di un *rettangoloide*).

Nell'ambito del caso (i) è la stessa equazione del luogo a fornire le indicazioni per risolvere il problema del dentro o fuori. Qui si illustra come procedere per determinare l'area racchiusa da un'ellisse E avente lunghezza dei semiassi maggiore e minore, rispettivamente, a e b .

Nel sistema di riferimento cartesiano avente per assi i prolungamenti dei semiassi dell'ellisse, scelto come rettangolo R quello avente vertici nei punti

$$(a, b), (-a, b), (-a, -b), (a, -b),$$

un punto di coordinate indipendenti $U_1 \sim \mathcal{U}(-a, a)$ e $U_2 \sim \mathcal{U}(-b, b)$ appartiene a E , se e solo se:¹⁵

$$\frac{U_1^2}{a^2} + \frac{U_2^2}{b^2} \leq 1. \quad (19)$$

La generazione del punto (U_1, U_2) deve essere eseguita n volte e ogni volta, mediante la (19), si determina se è avvenuto o meno il successo S_E ottenendo in tal modo $\bar{y}_n$. Dopo di ciò, si ha:

$$\text{area}(E) \approx 4ab \bar{y}_n \pm 4ab \sqrt{\frac{\bar{y}_n(1 - \bar{y}_n)}{n - 1}} \cdot z_{\alpha/2}, \quad \text{con fiducia } 1 - \alpha. \quad (20)$$

Esempio 3. Dalla (20) si ottiene un'approssimazione per π . Infatti, da essa e dal fatto che

$$\frac{\text{area}(E)}{\text{area}(R)} = \frac{ab\pi}{4ab} = \frac{\pi}{4} \iff \pi = \frac{\text{area}(E)}{ab},$$

si ottiene

$$\pi \approx 4\bar{y}_n \pm 4\sqrt{\frac{\bar{y}_n(1 - \bar{y}_n)}{n - 1}} \cdot z_{\alpha/2}, \quad \text{con fiducia } 1 - \alpha. \quad (21)$$

Nella (20) e nella (21), ovviamente, $\bar{y}_n$ rappresenta il rapporto tra il numero dei punti casuali che verificano la (19) e il numero complessivo dei punti generati. $\triangleleft$

Relativamente al caso (ii) è la stessa funzione integranda $h(\cdot)$ a fornire il criterio per stabilire se il punto appartiene o meno alla figura in questione. Più precisamente, sia (c, d) (con $c < d$) la restrizione considerata del dominio di $h(\cdot)$, $M := \max_{x \in (c, d)} f(x)$, R_h il rettangoloide di $h(\cdot)$ su (c, d) e, infine, R il rettangolo di base $(d - c)$ ed altezza M . Un punto di coordinate indipendenti $U_1 \sim \mathcal{U}(c, d)$ e $U_2 \sim \mathcal{U}(0, M)$ appartiene al rettangoloide R_h se e solo se:

$$h(U_1) \leq U_2. \quad (22)$$

La generazione del punto (U_1, U_2) deve essere eseguita n volte e ogni volta, mediante la (22), si determina se è avvenuto il successo S_{R_h} ottenendo in tal modo $\bar{y}_n$. Dopo di ciò, si ha:

$$\text{area}(R_h) \approx (d - c)M \bar{y}_n \pm (d - c)M \sqrt{\frac{\bar{y}_n(1 - \bar{y}_n)}{n - 1}} \cdot z_{\alpha/2}, \quad \text{con fiducia } 1 - \alpha. \quad (23)$$

¹⁵La generazione dei due numeri U_1 e U_2 simula la scelta a caso di un punto in R .

Nella (23), $\bar{y}_n$ fornisce il rapporto tra il numero dei punti casuali che verifica la (22) e il numero complessivo dei punti generati.

Esempio 4. L'applicazione della (23) consente, ad esempio, di verificare il Teorema di Archimede dell'area sotto un segmento di parabola scegliendo la funzione $g(x) = x^2$ in $(0, 1)$:

$$\frac{1}{3} = \text{area}(R_g) \approx \bar{y}_n \pm \sqrt{\frac{\bar{y}_n(1 - \bar{y}_n)}{n - 1}} \cdot z_{\alpha/2}, \quad \text{con fiducia } 1 - \alpha.$$

Nella precedente formula $\bar{y}_n$ fornisce, al solito, il rapporto tra il numero dei punti appartenenti al rettangoloide R_g ed il numero dei punti generati nel rettangolo $(0, 1) \times (0, 1)$.

Relativamente a questo rettangoloide, nel già citato articolo di Alwin Walther è illustrata un'attività laboratoriale per una determinazione manuale di $\bar{y}_n$. La classe viene divisa in terne di studenti. In ciascuna terna, due studenti hanno un sacchetto e l'altro un foglio per la registrazione dei risultati (ovviamente, nulla vieta che ci sia un'alternanza nei ruoli); le terne di studenti si ripartiscono il numero n delle osservazioni da produrre. Entrambi i sacchetti contengono 99 dischetti che si differenziano per il colore, ad esempio, rosso e blu, ma anche per le etichette riportate. Infatti, per $k \in \{1, 2, \dots, 99\}$, i dischetti di colore rosso recano su una faccia (*fronte*) i numeri $k/100$ scritti in decimale e sull'altra (*dorso*) il relativo quadrato mentre i dischetti di colore blu recano solo sul fronte i numeri $k/100$ scritti con quattro numeri decimali (ad esempio, $1/100$ è scritto come 0,0100). Dopo essere stati agitati per bene, da ciascun sacchetto è estratto un dischetto e lo studente incaricato registra nella prima e nella seconda colonna di una riga del suo foglio il risultato, rispettivamente, del dorso del dischetto rosso e quello del dischetto blu; nella terza colonna appone 1 se il valore della seconda colonna è minore o uguale di quello della prima colonna e 0 nel caso contrario. Alla fine del procedimento $\bar{y}_n$ viene calcolata come la somma dei valori riportati nella terza colonna di tutti i fogli rapportata ad n . $\triangleleft$

6 Il problema dell'ago di Buffon

Probabilmente questo problema rappresenta il contesto nel quale si innesta il progenitore del metodo Monte Carlo. Infatti, prima di Fermi e di Ulam era stato Laplace a dire nel 1812 che con la legge dei grandi numeri, applicata al problema dell'ago di Buffon, era possibile stimare π . Il matematico italiano Mario Lazzarini realizzò l'esperimento dell'ago di Buffon nel 1901 con 3408 osservazioni, ottenendo per π la nota approssimazione $355/113$.¹⁶

Il problema fu proposto da Georges-Louis Leclerc conte di Buffon nel *Essais d'Arithmétique morale* che fa parte della sua enciclopedica opera *L'Histoire naturelle, générale et particulière* composta da 36 volumi (di cui 8 postumi realizzati grazie

¹⁶Con una buona dose di fortuna, evidentemente.

al lavoro di Bernard Lacépède) apparsi dal 1749 al 1789. Su un pavimento sono disegnati segmenti di rette parallele a distanza d l'uno dall'altro e su di esso si fa cadere casualmente una bacchetta (ago) di lunghezza $l \leq d$. Viene richiesto di determinare la probabilità dell'evento S_{aB} che la bacchetta interseca uno dei segmenti di retta.

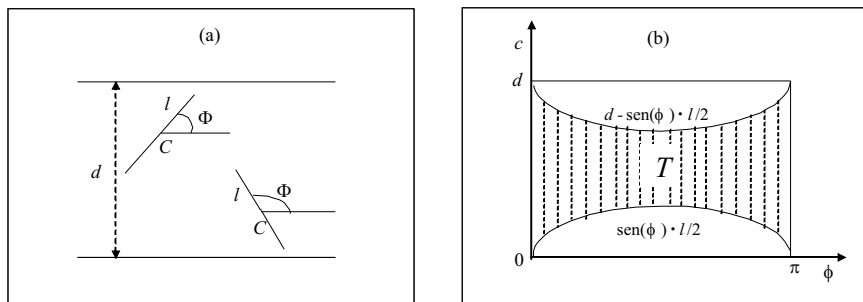


Figura 2: Nella parte (a) sono mostrate due situazioni nelle quali la bacchetta non interseca alcuno dei due segmenti di retta consecutivi fra i quali essa si colloca; sono anche indicati il centro C della bacchetta e l'angolo Φ che essa forma con la direzione delle rette parallele. Nella parte (b) è mostrato il dominio normale T costituito da tutte le coppie (Φ, C) che danno luogo a posizioni della bacchetta come nella parte (a).

Da un punto di vista analitico il problema può essere risolto al seguente modo. La casualità del lancio fa sì che detti C e Φ , rispettivamente, il centro della bacchetta e l'angolo che essa forma con la direzione delle rette parallele, risulta $C \sim \mathcal{U}(0, d)$ e $\Phi \sim \mathcal{U}(0, \pi)$; ovviamente C e Φ sono anche indipendenti tra loro. Come si può osservare nella parte (a) della Figura 2, la distanza della bacchetta dai due segmenti di retta consecutivi tra i quali essa si colloca è data da $\min \{ \sin(\Phi)l/2, d - \sin(\Phi)l/2 \}$. Pertanto la probabilità dell'evento $\bar{B}$ è data dalla misura del dominio normale T mostrato nella parte (b) della Figura 2 rispetto alla distribuzione congiunta di C e Φ . Quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\bar{S}_{aB}] &= \iint_T \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{\pi} dc d\phi = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi \int_{\sin(\phi)l/2}^{d - \sin(\phi)l/2} dc \\ &= \frac{1}{d\pi} \int_0^\pi [d - l \sin(\phi)] d\phi = 1 - \frac{2l}{d\pi}, \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$p_{aB} := \mathbb{P}[S_{aB}] = \frac{2l}{d} \cdot \frac{1}{\pi}. \quad (24)$$

Per approssimare $1/\pi$, basta allora considerare come genitrice il numero aleatorio $X = \frac{d}{2l}Y$ con $Y \sim \mathcal{B}(p_{aB})$ prova dello schema binomiale con successo S_{aB} .

Infatti, risulta:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{d}{2l} \cdot \mathbb{E}[Y] = \frac{d}{2l} \cdot p_{aB} = \frac{1}{\pi}, \\ \mathbb{D}^2[X] &= \frac{d^2}{4l^2} \cdot \mathbb{D}^2[Y] = \frac{d^2}{4l^2} \cdot p_{aB}(1 - p_{aB}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{d}{2l} - \frac{1}{\pi} \right) < +\infty, \\ \bar{X}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{d}{2l} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{d}{2l} \cdot \bar{Y}_n.\end{aligned}\quad (25)$$

Per quanto riguarda la riduzione della varianza, dalla (25) si evince che bisogna rendere il fattore in parentesi tonde il più piccolo possibile. Tenendo conto del vincolo $l \leq d$ la migliore scelta è $l = d$; essa conduce a $p_{aB} = 2/\pi$ e $X = Y/2$,¹⁷ per cui

$$\frac{1}{\pi} \approx \frac{1}{2} \bar{y}_n \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{y}_n(1 - \bar{y}_n)}{n-1}} \cdot z_{\alpha/2}, \quad \text{con fiducia } 1 - \alpha. \quad (26)$$

In essa, $\bar{y}_n$ è il rapporto tra il numero delle intersezioni bacchetta-segmento ed il numero n dei lanci.

Osservazione 7. Lazzarini utilizzò la spaziatrice adimensionale d/l pari a 1,2 e con questa determinò π prendendo il reciproco di $(0,6 \cdot \bar{y}_n)$. In tal modo, però, si perde il controllo sull'ampiezza dell'errore massimo e questo non rientra nei canoni del metodo Monte Carlo nell'accezione moderna. $\triangleleft$

Un'approssimazione di π nell'ambito del problema dell'ago di Buffon come metodo Monte Carlo si ottiene considerando una genitrice geometrica. Infatti, a tale scopo, basta considerare come genitrice il numero aleatorio $Q = \frac{2l}{d}T$ con $T \sim \mathcal{G}(p_{aB})$ che conta il numero dei lanci della bacchetta necessari ad osservare S_{aB} per la prima volta. Infatti, per la (4) e la (6) risulta:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q] &= \frac{2l}{d} \cdot \mathbb{E}[T] = \frac{2l}{d} \cdot \frac{1}{p_{aB}} = \frac{2l}{d} \cdot \frac{d}{2l} \pi = \pi, \\ \mathbb{D}^2[Q] &= \frac{4l^2}{d^2} \cdot \mathbb{D}^2[T] = \frac{4l^2}{d^2} \cdot \frac{(1 - p_{aB})}{p_{aB}^2} = \pi^2 \frac{2l}{d} \left(\frac{d}{2l} - \frac{1}{\pi} \right) < +\infty, \\ \bar{Q}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i = \frac{2l}{d} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = \frac{2l}{d} \cdot \bar{T}_n.\end{aligned}\quad (27)$$

Per quanto riguarda la riduzione della varianza, dalla (27) si evince che la migliore scelta è $l = d$ che implica, di nuovo $p_{aB} = 2/\pi$, ma anche $Q = 2T$ e

$$\pi \approx 2\bar{t}_n \pm 2\sqrt{\frac{s_n^2[T]}{n}} \cdot z_{\alpha/2}, \quad \text{con fiducia } 1 - \alpha. \quad (28)$$

Nella (28), $\bar{t}_n$ è il rapporto tra il numero complessivo dei lanci della bacchetta e il numero n delle osservazioni di T mentre $s_n^2[T]$ è la stima della varianza di T ottenuta mediante la (10).

¹⁷Di solito, nell'illustrazione del metodo si sceglie d/l pari a 2.

7 Numero degli elementi distinti di una lista

Sia $L = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ una lista di elementi di lunghezza m . Si vuole stimare il numero d degli elementi distinti di L .

A tale scopo si ponga $S_U = \{1, 2, \dots, m\}$ e per $u \in S_U$ si indichi con $k(u)$ il numero delle volte che l'elemento di posto u si presenta in tutta la lista L ; non è difficile rendersi conto che

$$d = \sum_{u=1}^m \frac{1}{k(u)}. \quad (29)$$

Infatti, ad esempio, si consideri il primo elemento di L ; in L ci sono $k(1)$ elementi uguali e ciascuno di essi porta come contributo $1/k(1)$ alla somma a secondo membro della (29): in totale essi apportano un contributo unitario. Allo stesso modo si ragiona con tutti gli altri elementi distinti di L . Dopo di ciò, indicato con U un numero uniforme discreto su S_U (ossia che assegna la probabilità $1/m$ ad ogni elemento di S_U), il numero aleatorio

$$X = \frac{m}{k(U)} \quad (30)$$

è la genitrice desiderata. Infatti, per la (48) scritta per $r = 1$, risulta:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\frac{m}{k(U)}\right] = \sum_{u=1}^m \frac{m}{k(u)} \cdot \frac{1}{m} = \sum_{u=1}^m \frac{1}{k(u)} = d. \quad (31)$$

La finitezza della varianza di X è garantita dal fatto che essa è maggiorata da $d(m-d)$. Infatti, indicando con $u_1, u_2, \dots, u_d$ indici corrispondenti alle d lettere distinte, si ha che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{m^2}{k^2(U)}\right] = \sum_{u=1}^m \frac{m^2}{k^2(u)} \cdot \frac{1}{m} = m \sum_{u=1}^m \frac{1}{k^2(u)} \\ &= m \left[\frac{k(u_1)}{k^2(u_1)} + \frac{k(u_2)}{k^2(u_2)} + \dots + \frac{k(u_d)}{k^2(u_d)} \right] \\ &= m \left[\frac{1}{k(u_1)} + \frac{1}{k(u_2)} + \dots + \frac{1}{k(u_d)} \right] \leq md, \end{aligned}$$

per cui

$$\mathbb{D}^2[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] \leq md - d^2 = d(m-d) < +\infty. \quad (32)$$

Esempio 5. Sia $L = [A, B, R, A, C, A, D, A, B, R, A]$; quindi $m = 11$ e ci sono 5 lettere A , 2 lettere B , 2 lettere R , 1 lettera C e 1 lettera D . In definitiva $d = 5$. D'altra parte,

$$\begin{aligned} k(1) &= 5, & k(2) &= 2, & k(3) &= 2, & k(4) &= 5, & k(5) &= 1, \\ k(6) &= 5, & k(7) &= 1, & k(8) &= 5, & k(9) &= 2, & k(10) &= 2, \\ k(11) &= 5, \end{aligned}$$

cosicch 

$$\sum_{u=1}^{11} \frac{1}{k(u)} = \frac{5}{5} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 5 = d.^{18} \quad (33)$$

Per ottenere le osservazioni della genitrice X basta inserire nel *cestino* della tombola napoletana solo i pezzi numerati da 1 a 11 e estraendone uno di essi a caso. Il pezzo estratto individua una lettera della lista e, procedendo dal primo all'ultimo posto bisogna contare quante essa volte compare nella lista; dopo di ci , il reciproco del risultato del conteggio moltiplicato per 11   il valore assunto da X . Ad esempio,

1. $L = (A, B, R, A, C, A, D, A, B, R, A)$;
2. $m = 11$;
3. dal cestino, dopo una energica mischiata, esce il pezzo con il numero 6 $\Rightarrow u = 6$;
4. $L[6] = A$;
5. si contano 5 lettere $A \Rightarrow k(6) = 5$;
6. $x = 11/5$.

Ovviamente, e questo vale in generale, il simbolo $L[u]$ individua l'elemento di posto u in L . $\triangleleft$

Con n osservazioni della genitrice X , indicato al solito con

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{k(U_i)}, \quad \bar{X}_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{k^2(U_i)}$$

e tenendo conto della (10) per ottenere una stima della varianza di X , si ha:

$$d \approx \bar{x}_n \pm \sqrt{\frac{s_n^2[X]}{n}} \cdot z_{\alpha/2}, \quad \text{con fiducialit  } 1 - \alpha.^{19} \quad (34)$$

Osservazione 8. Si osservi che scegliendo un valore di n per il quale l'errore massimo minore risulti minore di 0,5 la (34) diventa

$$d = \lfloor \bar{x}_n \rfloor, \quad \text{con fiducialit  } 1 - \alpha, \quad (35)$$

per il fatto che la quantit  d da determinare   un numero intero. $\triangleleft$

¹⁸Infatti, l'addendo $1/5$ compare 5 volte (per la lettera A), l'addendo $1/2$ compare 2 volte (per la lettera B) e 2 volte (per la lettera R) e l'addendo $1/1$ compare 1 volta (per la lettera C) e 1 volta (per la lettera D).

¹⁹Il simbolo $\lfloor \cdot \rfloor$ indica l'operazione di arrotondamento: il numero intero pi  vicino al suo argomento.

Il procedimento appena descritto è molto dispendioso: per ogni osservazione bisogna scorrere tutta la lista per contare quante volte in essa è presente il simbolo individuato da U . Si descriverà ora un altro metodo Monte Carlo che richiede, a parità del numero delle osservazioni, un costo minore. Con lo stesso significato assegnato a U nella corrente sezione, si definisca dapprima il numero aleatorio Y al seguente modo:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se } \nexists j < U : L[j] = L[U], \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (36)$$

In altri termini Y , che ha legge di Bernoulli, assume il valore 1 solo se l'elemento individuato da U non è preceduto altri elementi uguali. Per determinare la probabilità dell'evento successo, si supponga dapprima che sia assegnato il valore u a U ; risulta

$$\mathbb{P}(Y = 1 | U = u) = \frac{1}{k(u)},^{20}$$

in quanto i $k(u)$ elementi uguali tra loro nella lista L hanno la stessa probabilità di essere individuati dal numero aleatorio U . Dal momento che U ha legge uniforme discreta in S_U , la formula delle alternative insieme alla (29) consente di ottenere:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 1) &= \sum_{u=1}^m \mathbb{P}(Y = 1 | U = u) \cdot \mathbb{P}(U = u) = \sum_{u=1}^m \frac{1}{k(u)} \cdot \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m \frac{1}{k(u)} = \frac{d}{m}. \end{aligned} \quad (37)$$

In definitiva, $Y \sim \mathcal{B}(d/m)$ e le sue osservazioni sono prove di uno schema di Bernoulli in quanto dall'indipendenza delle osservazioni relative alla variabile U scaturisce l'indipendenza delle osservazioni relative alla variabile Y .

Esempio 6 (Continuazione dell'Esempio 5). Alcuni casi particolari possono servire a chiarire come si determina il valore assunto dal numero aleatorio Y ; dal cestino, dopo una energica mischiata, esce il pezzo con il numero:

$4 \Rightarrow u = 4, \quad L[4] = A, \quad y = 0, \text{ (la lettera } A \text{ si trova già in prima posizione);}$

$5 \Rightarrow u = 5, \quad L[5] = C, \quad y = 1, \text{ (prima comparsa della lettera } C);$

$6 \Rightarrow u = 6, \quad L[6] = A, \quad y = 0, \text{ (la lettera } A \text{ si trova già in prima posizione).}$

Inoltre,

$$\mathbb{P}(Y = 1 | U = 6) = \mathbb{P}(Y = 1 | \text{"è stata individuata la lettera"} A) = \frac{1}{5},$$

dal momento che in L ci sono 5 lettere A e solo una di esse può essere quella che precede tutte le altre. Infine, si osservi che, per la verifica del successo, non c'è nemmeno bisogno di scorrere la lista fino al posto $U = u$; ad esempio, nel caso di $u = 6$ la verifica si esaurisce già sulla prima posizione in quanto $L[1] = A$. $\triangleleft$

²⁰Il simbolo $|$ sta a ricordare che è noto che si è verificato l'evento $\{U = u\}$.

Allora, $V = mY$ è la genitrice ricercata in quanto:

$$\mathbb{E}[V] = m\mathbb{E}[Y] = d,$$

e

$$\mathbb{D}^2[V] = m^2\mathbb{D}^2[Y] = m^2 \frac{d}{m} \left(1 - \frac{d}{m}\right) = d(m - d) < +\infty. \quad (38)$$

Con n osservazioni di Y , indicato al solito con

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

e tenendo conto della (11), si ha:

$$d \approx m\bar{y}_n \pm m\sqrt{\frac{y_n(1 - y_n)}{n - 1}} \cdot z_{\alpha/2}, \quad \text{con fiducia } 1 - \alpha. \quad (39)$$

In virtù dell'Osservazione 8, la formula precedente si modifica in

$$d = \lfloor \bar{y}_n \rfloor, \quad \text{con fiducia } 1 - \alpha, \quad (40)$$

nel caso in cui si sceglie un valore di n per il quale l'errore massimo minore risulti minore di 0,5.

Osservazione 9. Come osservato alla fine dell'Esempio (6) con la genitrice V si riduce di molto il numero dei controlli da effettuare sulla lista rispetto a quelli eseguiti con la genitrice X ovvero, indicando con C il costo unitario medio per ottenere una osservazione, risulta $C_V < C_X$. D'altra parte, però, dalla (32) e dalla (38) si evince che $\mathbb{D}^2[X] \leq \mathbb{D}^2[V]$. In questo caso, quindi, occorre verificare se risulta

$$C_X > C_V \cdot \frac{\mathbb{D}^2[V]}{\mathbb{D}^2[X]},$$

nel qual caso è conveniente preferire V rispetto a X . Questo fatto può essere accertato con una elaborazione preliminare di entrambi i metodi con un numero di osservazioni piccolo rispetto a n .

Con 100 osservazioni sia per X che per V e considerando come costo il numero dei confronti per osservazione, relativamente agli Esempi 5 e 6, risulta $C_X = 11 \cdot 100 = 1100$ e $\mathbb{D}^2[V] = 5 \cdot 6 = 30$, mentre, approssimativamente, la media di C_V e $\mathbb{D}^2[X]$ sono stimate, rispettivamente, 150 e 10. Dopo di ciò, si ha

$$1100 > 150 \cdot \frac{30}{10} = 450,$$

e quindi V è da preferire a X

◁

8 Calcolo di un integrale definito

Sebbene la presente esposizione riguarderà il caso degli integrali ad una dimensione, la forza del metodo Monte Carlo per approssimare un integrale definito risiede nel fatto che esso prescinde dalla dimensione del dominio. Con $h(\cdot)$ funzione continua nell'intervallo (a, b) , si vuole approssimare, con contestuale determinazione dell'accuratezza, la quantità:

$$I = \int_a^b h(x) dx.$$

A tale scopo, se W è un numero aleatorio assolutamente continuo avente funzione di densità di probabilità $g(\cdot)$ non nulla solo nell'intervallo (a, b) , il numero aleatorio

$$X = \frac{h(W)}{g(W)} \quad (41)$$

rispetta il requisito fondamentale che

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\frac{h(W)}{g(W)}\right] = \int_a^b \frac{h(w)}{g(w)} g(w) dw = \int_a^b h(w) dw = I.$$

Ovviamente, per utilizzare X come genitrice è necessario assicurarsi anche che

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[\frac{h^2(W)}{g^2(W)}\right] = \int_a^b \frac{h^2(w)}{g^2(w)} g(w) dw = \int_a^b \frac{h^2(w)}{g(w)} dw < +\infty.$$

Dopo di ciò, con n osservazioni di W , e quindi di X , posto

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{h(W_i)}{g(W_i)}, \quad \bar{X}_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{h^2(W_i)}{g^2(W_i)},$$

e tenendo conto della (10), si ha:

$$I \approx \bar{x}_n \pm \sqrt{\frac{s_n^2[X]}{n}} \cdot z_{\alpha/2}, \quad \text{con fiducia } 1 - \alpha. \quad (42)$$

Il grado di libertà lasciato a W è utile ai fini della riduzione della varianza. Infatti, si potrebbe essere in grado di determinare una funzione di densità di probabilità $g(\cdot)$ che “segua”, almeno in qualche tratto dell'intervallo (a, b) , l'andamento della funzione integranda. In altri termini, con un'opportuna scelta di $g(\cdot)$ si potrebbe assegnare maggiore importanza ai sottointervalli di (a, b) nei quali si trovano i massimi relativi del grafico di $h(\cdot)$. In sostanza, è la procedura di campionamento, che viene detta *a importanza*, che dovrebbe portare a ridurre la varianza. L'esempio seguente può essere utile a chiarire il ragionamento svolto.

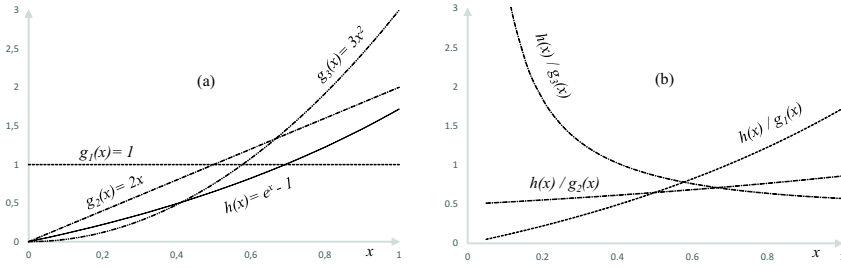


Figura 3: Nella parte (a) è mostrato il grafico della funzione integranda considerata nell'Esempio 7, ossia $h(x) = e^x - 1$, e i grafici delle funzioni di probabilità delle prime 3 leggi di potenza nell'intervallo $(0, 1)$. Si noti che la funzione $g_2(x)$ è quella che meglio segue l'andamento della funzione $h(x)$. Tale fatto è maggiormente evidenziato nella parte (b) dove sono riportati i grafici di $h(x)/g_1(x)$, $h(x)/g_2(x)$ e $h(x)/g_3(x)$: il grafico del rapporto $h(x)/g_2(x)$ è quello che maggiormente si avvicina a un segmento orizzontale.

Esempio 7. Si vuole approssimare l'integrale della funzione $h(x) = e^x - 1$ sull'intervallo $(0, 1)$ e quindi $I = 0,7183$ con arrotondamento sulla quarta cifra decimale. Si considerino le funzioni di densità di probabilità delle prime 3 leggi di potenze, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 2x$ e $g_3(x) = 3x^2$, i cui grafici sono riportati nella parte (a) della Figura 3. Nella parte (b) della stessa figura, invece, sono riportati, per $k = 1, 2, 3$, i grafici dei rapporti $h(x)/g_k(x)$: da essa si evince che il grafico del rapporto $h(x)/g_2(x)$ è quello che più si avvicina ad un segmento parallelo all'asse orizzontale e pertanto è la seconda legge di potenza a seguire meglio la funzione $h(x)$. Numerose ripetizioni della (42) con $n = 10000$ e $\alpha = 0,05$, confermano la riduzione della varianza quando si passa da $g_1(x)$ a $g_3(x)$ e da $g_3(x)$ a $g_2(x)$. La tabella seguente riporta i risultati di una di queste elaborazioni.

k	$\bar{x}_n$	$s_n^2(X)$	$\sqrt{\frac{s_n^2(X)}{n}} \cdot z_{\alpha/2}$
1	0,7176	0,2375	0,0319
3	0,7132	0,0516	0,0148
2	0,7186	0,0079	0,0058

Le elaborazioni sono state eseguite con Excel utilizzando i numeri pseudo casuali forniti dalla funzione `casuale()` e la (46) con $a = 0$, $b = 1$ e per $k = 2$ e $k = 3$. Nei tre casi considerati, il costo unitario per ottenere una osservazione è pressappoco lo stesso. ◀

9 Posizioni e definizioni

Qui si assume conosciuta dal lettore la descrizione in termini di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ di un *esperimento aleatorio* $\mathcal{E}$.

Indicata con $\mathcal{B}$ la sigma-algebra degli insiemi di Borel di $\mathbb{R}$,²¹ un numero aleatorio (o una *variabile aleatoria*) reale X è una applicazione di Ω in $\mathbb{R}$ per la quale risulta

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

e la sua *legge* (o *distribuzione*) $\mathbb{P}_X$ è definita mediante la posizione:

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B).$$

Qui $\mathbb{P}(\cdot)$ è la probabilità dell'evento (un qualsiasi elemento della sigma-algebra $\mathcal{A}$) racchiuso dalle parentesi tonde.

La famiglia $\mathcal{S}$ costituita dalle semirette sinistre chiuse di $\mathbb{R}$ da sola è sufficiente a generare la sigma-algebra di Borel $\mathcal{B}$. Dal momento che ciascuna di esse è individuata esclusivamente dalla sua origine, la legge di un numero aleatorio X ristretta a $\mathcal{S}$ è una funzione reale di variabile reale

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) := \mathbb{P}_X([-\infty, x]) \equiv \mathbb{P}(X \leq x),$$

che prende il nome di *funzione di distribuzione* di X . La legge $\mathbb{P}_X(\cdot)$ di X è ricostruibile mediante opportuna integrazione a partire dalla funzione di distribuzione $F_X(\cdot)$.

Definizione 5. Un numero aleatorio X la cui funzione di distribuzione $F_X(\cdot)$ si scrive come

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) := \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi,$$

con $f_X(\cdot)$ funzione definita in $\mathbb{R}$, non negativa e normalizzata ad 1, si dice essere *assolutamente continuo*. La funzione $f_X(\cdot)$ prende il nome di *funzione di densità di probabilità* di X . ◁

Per un numero aleatorio X assolutamente continuo, la posizione

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X^r] := \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) dx,$$

definisce la sua media di ordine r .²² Ovviamente, la media di X è la sua media del primo ordine; invece, la quantità

$$\mathbb{D}^2[X] := \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x) dx \equiv \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X],$$

²¹In altri termini, la sigma-algebra generata dagli intervalli di $\mathbb{R}$.

²²Per maggiore precisione si fa notare che per dare senso alla definizione di ordine r è richiesta l'esistenza dell'integrale che in essa compare.

è la varianza di X . Se X ha varianza finita, si dice che la trasformazione

$$Y = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathbb{D}^2[X]}},$$

standardizza X : il numero aleatorio Y ha media nulla e varianza unitaria.

Esempio 8. Con a e b numeri reali tali che $a < b$, un semplice ma, ai fini del metodo Monte Carlo, importante esempio di funzione di densità di probabilità è fornito da:

$$f_V(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases} \quad (43)$$

in tal caso si dice che V ha *legge uniforme* nell'intervallo (a, b) oppure, in breve, $V \sim \mathcal{U}(a, b)$. I numeri reali a e b fungono da parametri per la legge uniforme; comunque ai fini delle caratteristiche probabilistiche è sufficiente riferirsi esclusivamente ad un numero aleatorio $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ in quanto:

$$V = a + (b - a)U. \quad (44)$$

Per U è agevole verificare che

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[U^r] = \frac{1}{r+1} \Rightarrow \mathbb{E}[U] = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \mathbb{D}^2[U] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Quindi, per V si ha:

$$\mathbb{E}[V] = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad \mathbb{D}^2[V] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

I linguaggi di programmazione scientifici (MATLAB, Linguaggio R, Fortran, Excel, ecc.) mettono a disposizione funzioni di libreria che forniscono i cosiddetti numeri *pseudo-casuali*: realizzazioni di $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ottenute con una procedura matematica. Mediante la (44) è immediato ottenere una realizzazione di V ; ad esempio, in Excel, supponendo che a sia memorizzato nella cella B1 e b nella cella B2, basta inserire in una qualsiasi cella vuota la formula:

$$=B1 + (B2-B1)*casuale(). \quad \triangleleft$$

Esempio 9. La legge uniforme è un caso particolare della famiglia delle *leggi di potenza* che hanno, scegliendo per semplicità di esposizione l'intervallo $(0, 1)$, per funzione di densità di probabilità:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_{U_{(k)}}(x) = \begin{cases} kx^{k-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases} \quad (45)$$

Infatti, per $k = 1$ si ha che $U_{(1)} \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Inoltre, è agevole verificare che risulta

$$\forall k, r \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[U_{(k)}^r] = \int_0^1 x^r kx^{k-1} dx = \frac{k}{k+r},$$

per cui

$$\mathbb{E}[U_{(k)}] = \frac{k}{k+1} \quad \text{e} \quad \mathbb{D}^2[U_{(k)}] = \frac{k}{k+2} - \frac{k^2}{(k+1)^2} = \frac{k}{(k+2)(k+1)^2}.$$

Le precedenti relazioni generalizzano quelle mostrate per la legge uniforme. In simboli, si scrive che $U_{(k)} \sim \mathcal{LP}(k, (0, 1))$. D'altra parte, con $a < b$, la trasformazione

$$V_{(k)} = a + (b - a)U_{(k)}$$

porta l'intervallo $(0, 1)$ nell'intervallo (a, b) ma non modifica la legge di probabilità che pertanto resta legge di potenza e si dice che $V_{(k)}$ ha legge di potenza nell'intervallo (a, b) ; in simboli $V_{(k)} \sim \mathcal{LP}(k, (a, b))$.

I numeri aleatori con legge di potenza sono semplici da generare con procedura numerica: se u è un numero pseudo-casuale il generatore desiderato per un numero $V_{(k)} \sim \mathcal{LP}(k, (a, b))$ è il seguente:

$$v_{(k)} = a + (b - a) \sqrt[k]{u}. \quad (46)$$

Ad esempio, in Excel, supponendo che a sia memorizzato nella cella B1, b nella cella B2 e k nella cella B3, basta inserire in una qualsiasi cella vuota la formula:

$$= B1 + (B2 - B1) * (\text{casuale}()) ^ (1/B3). \quad \triangleleft$$

Esempio 10. Un'altro esempio notevole di funzione di densità di probabilità è fornito dalla funzione il cui grafico è noto come *curva a campana*:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Si dice allora che Z ha *legge normale o di Gauss* di parametri 0 e 1 oppure, in breve, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$; qui i parametri 0 e 1 assumono, rispettivamente, il ruolo di media e di varianza di Z e pertanto Z ha legge normale *standard*. Ogni altro numero gaussiano X può essere ottenuto da Z mediante la trasformazione inversa della standardizzazione: $X = \mu + \sigma Z$. Per indicare la legge di X si scrive $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con i parametri μ e σ^2 che assumono, rispettivamente, il significato di media e di varianza di X .

Relativamente a Z , si definisce *quantile superiore* di ordine $\alpha \in (0, 1)$ il numero reale z_α per il quale:

$$\mathbb{P}(Z > z_\alpha) = \alpha.$$

Tenendo conto della simmetria rispetto all'asse verticale della curva a campana è abbastanza agevole verificare che:

$$\mathbb{P}(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha. \quad (47)$$

In particolare, con arrotondamento sulla seconda cifra decimale, risulta:

$$z_{0,16} = 1, \quad z_{0,05} = 1,64, \quad z_{0,025} = 1,96 \quad \text{e} \quad z_{0,005} = 2,58.$$

$\triangleleft$

Definizione 6. Un numero aleatorio X per il quale esiste un sottoinsieme $S_X \subset \mathbb{R}$ al più numerabile e tale che $\mathbb{P}_X(S_X) := \mathbb{P}(X \in S_X) = 1$ è detto *discreto*. Pertanto esso è individuato dalla funzione

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) := \begin{cases} \mathbb{P}(X = x), & \text{se } x \in S_X, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione $f_X(\cdot)$ prende il nome di *funzione di probabilità* di X . ◁

Esempio 11. Sia $m \in \mathbb{N}$ e $S_U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}$. Il numero aleatorio U che assume con probabilità $1/m$ ciascun valore di S_U si dice *uniforme discreto* e si scrive $U \sim \mathcal{U}_d(S_U)$. Per esso, la funzione di probabilità è costantemente uguale a $1/m$ su S_U e si annulla sugli altri valori reali. ◁

Altri esempi di numeri aleatori discreti sono stati mostrati nell'ambito dello schema di Bernoulli.

Per un numero aleatorio X discreto, posto $S_X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, la posizione

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X^r] := \sum_{n=1}^{\infty} x_n^r f_X(x_n), \quad (48)$$

definisce la sua media di ordine r .²³ Anche nel caso discreto sussiste la relazione

$$\mathbb{D}^2[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]. \quad (49)$$

Si completa questo riepilogo con due esempi di spazi di probabilità associati ad un esperimento aleatorio: la scelta di un punto a caso in un intervallo $[a, b[\subset \mathbb{R}$ e la scelta di un punto a caso in un rettangolo $R = [a, b[\times [c, d[$. Nel primo caso è ovvio che $\Omega \equiv [a, b[$, la qual cosa suggerisce la scelta $\mathcal{F} \equiv \mathcal{B}_{[a, b[}$, con $\mathcal{B}_{[a, b[}$ la sigma-algebra degli insiemi di Borel di $\mathbb{R}$ contenuti nell'intervallo $[a, b[$. Infine, assegnando ad ogni intervallo $[a, x[$ la probabilità $(x - a)/(b - a)$ si ottiene una premisura che si prolunga in maniera univoca su $\mathcal{B}_{[a, b[}$: la misura di Lebesgue $\lambda_{[a, b[}$ dell'intervallo $[a, b[$. In definitiva, la scelta di un punto a caso nell'intervallo $[a, b[$ è descritta dalla terna $([a, b[, \mathcal{B}_{[a, b[, \lambda_{[a, b[})$.

L'estensione al caso bidimensionale si ottiene con la sostituzione degli intervalli con i rettangoli e della lunghezza con l'area: quindi un modello per l'esperimento consistente nella scelta casuale di un punto nel rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$ è fornito dallo spazio di probabilità $(R, \mathcal{B}_R, \lambda_R)$. In tale contesto λ_R è l'estensione della premisura che su un qualsiasi rettangolo del tipo $[a, x[\times [b, y[$ contenuto in R vale il rapporto tra l'area del rettangolo e l'area di R ; inoltre, per una figura A del tipo considerato in questa sezione e contenuta in R risulta:

$$\mathbb{P}(A) \equiv \lambda_R(A) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(R)}.^{24}$$

²³Per maggiore precisione si fa notare che per dare senso alla definizione di ordine r è richiesta la regolarità delle serie che in essa compare.

²⁴Si osservi, che al di là del formalismo utilizzato, il risultato estende la definizione classica di probabilità relativa ad esperimenti con un numero finito di esiti tra i quali vige una perfetta simmetria.

In altri termini, la probabilità che un punto scelto a caso nel rettangolo R stia nella figura A è uguale al rapporto tra l'area di A e l'area di R .

10 Risultati di convergenza

Si forniscono gli enunciati dei due importanti teoremi di convergenza che forniscono il substrato teorico del metodo Monte Carlo.

Teorema 1 (legge forte dei grandi numeri). *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia X un numero aleatorio definito su esso tale che $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$ (pertanto, X è dotato di media finita: $\mathbb{E}[X] \equiv \mu \in \mathbb{R}$). Sia, inoltre, $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri aleatori aventi la stessa legge di X e indipendenti tra loro. Posto*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (50)$$

si ha:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1.$$

La legge forte dei grandi numeri afferma, quindi, che la successione avente come termine generale la media campionaria, $\bar{X}_n$, dei primi n numeri aleatori della successione considerata converge quasi certamente alla loro comune media, qualunque sia la legge di X .

Si consideri ora la successione delle prove indipendenti dello schema di Bernoulli. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\bar{X}_n$ rappresenta la *frequenza relativa* dei successi nelle prime n prove. Quindi, nello schema di Bernoulli, la legge forte dei grandi numeri assume il seguente significato: la successione avente come termine generale la frequenza relativa del successo nelle prime n effettuazioni dell'esperimento aleatorio converge quasi certamente alla probabilità del successo.

Teorema 2 (centrale di convergenza).²⁵ *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e sia X un numero aleatorio definito su esso tale che $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$ (pertanto X è dotato di media $\mathbb{E}[X] = \mu$ e varianza $\mathbb{D}^2[X] = \sigma^2$ entrambe finite). Sia, inoltre, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri aleatori aventi la stessa legge di X e indipendenti tra loro. Posto*

$$\tilde{Z}_n := \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

si ha:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\tilde{Z}_n}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz. \quad (51)$$

²⁵Esistono numerose formulazioni di tale risultato.

Dal momento che $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$ e $\mathbb{D}^2[\bar{X}_n] = \sigma^2/n$, il teorema centrale di convergenza afferma che la successione $\{\tilde{Z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avente come termine generale la standardizzata della media campionaria converge in distribuzione ad un numero normale standard, qualunque sia la legge di X .

Osservazione 10. Una regola empirica ampiamente riconosciuta afferma che la legge della standardizzata della media campionaria è ben approssimata da quella di un numero aleatorio $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ già a partire da $n = 30$, qualunque sia la legge di X .

◁

Georg Cantor e il caso del cardinale assassinato: un delitto contabilmente riconoscibile

Francesco de Giovanni *

*“Che cosa è l'uomo nella natura? Un nulla di contro all'infinito,
un tutto di contro al niente, un mezzo tra niente e tutto.
Infinitamente lontano dal comprendere gli estremi,
la fine delle cose e il loro principio sono per lui invincibilmente
nascosti in un segreto impenetrabile, ugualmente incapace
di vedere il niente da dove è venuto come l'infinito in cui è inghiottito”*

– Blaise Pascal –

1 Introduzione

Chi dovesse iniziare la lettura di queste pagine aspettandosi un racconto poliziesco o qualcosa del genere rimarrebbe sicuramente deluso. Avrebbe infatti probabilmente confuso “cardinali” con “canarine” oppure l'autore col suo cugino narratore. Non incontrerà infatti alti prelati barbaramente uccisi, magari in luoghi silenziosi destinati al culto e alla meditazione, non dovrà cercare moventi o individuare colpevoli in ambienti per loro natura poco propensi ad aprire armadi polverosi. Ma in fondo il titolo è davvero soltanto un ingannevole pretesto, scelto per attrarre lettori e poter raccontare la storia della scoperta dell'infinito attuale e della sua affermazione.

Infatti i cardinali di cui si parlerà sono soltanto enti matematici, e in quanto tali astratti; sono soltanto numeri, anche se grandi, molto grandi, incredibilmente grandi.

Ma andiamo per ordine. Per capire di quali cardinali si tratti, e in quale senso uno di loro possa eliminarne un altro, occorre raccontare una storia che comincia moltissimo tempo fa, un racconto matematico il cui personaggio principale è l'*infinito*, e che inevitabilmente dovrà descrivere il tentativo di negarne l'esistenza, la sua affermazione e la scoperta della sua molteplicità. E nella narrazione la scelta è stata quella di privilegiare la chiarezza rispetto al rigore, e lo scopo quello di dare volto e umanità a quanti si sono spesso combattuti su questi temi, senza esclusione di colpi.

L'infinito: uno, nessuno e centomila, e ancora, ancora di più.

* Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università di Napoli Federico II
Complesso Universitario Monte S. Angelo, via Cintia, Napoli
e-mail: degiovan@unina.it
Lavoro realizzato nell'ambito del progetto ApV-AGTA

2 L'infinito e i numeri cardinali

Ritengo del tutto implausibile che l'infinito possa essere ritrovato nella realtà sensibile, e a sostegno di questa affermazione sembra opportuno ricordare qui le parole pronunciate da *David Hilbert* (1862–1943) nel 1925:

“Abbiamo già visto che, nella realtà, l'infinito è qualcosa di irreperibile, quali che siano le esperienze, le osservazioni e il sapere cui si fa ricorso. Ma può il pensiero sulle cose essere tanto differente dalle cose stesse? E i processi del pensiero possono essere tanto diversi dagli effettivi processi delle cose? In breve: può il pensiero essere tanto lontano dalla realtà?”

D'altra parte anche *Bertrand Russell* (1872–1970), nel 1919 affermava: “Non si può dire che sia sicuro che esista in realtà un qualsiasi insieme infinito nel mondo. L'ipotesi che esista è quello che noi chiamiamo l'assioma dell'infinito”.

Filosofi e matematici hanno dovuto affrontare, fin dai tempi antichi, il problema dell'infinito, della sua realtà e della sua comprensione, dei suoi intrecci con la teologia. L'affermazione di *Aristotele* (384–322 a.C.) secondo la quale “l'infinito come totalità compiuta, l'infinito in atto, non esiste” ha ostacolato lo sviluppo della ricerca sulle possibilità dell'infinito per oltre duemila anni. E si può dire che ancora prima, intorno al 500 a.C., la comparsa dell'infinito aveva portato, direttamente o indirettamente, ad un delitto, un omicidio reale, con una vittima in carne ed ossa, e per di più in un ambiente in qualche senso sacerdotale.

È ben noto che *Pitagora di Samo* (570–495 a.C.) ed i suoi discepoli avevano misticamente posto il *numero* al centro della loro filosofia, considerandolo essenza stessa della natura; i numeri pitagorici erano tutti razionali, e la prova dell'esistenza di entità irrazionali (e quindi di numeri decimali illimitati non periodici), come la misura della diagonale del quadrato di lato unitario, aveva avuto un effetto sconvolgente.

Ritenendo che tale scoperta avrebbe potuto colpire in modo irreparabile i fondamenti stessi della sua teoria, Pitagora vincolò al silenzio assoluto su questo punto i partecipanti alla riunione (ristretta agli iniziati) in cui era stata annunciato l'incredibile risultato. La leggenda racconta però che *Ippaso di Metaponto*, uno dei principali esponenti della scuola pitagorica, rivelò ad altri il segreto dell'irrazionalità, e per questo fu strangolato (o affogato) da Pitagora in persona o da sicari da questo inviati.



fig.1 – Ippaso di Metaponto

È opportuno osservare che Ippaso sembra sia stato, dopo il fondatore, il personaggio di maggior rilievo della scuola pitagorica, e che a lui vengono attribuite varie scoperte matematiche. Inoltre, alcune fonti indicano Ippaso come il maestro di *Eracrito di Efeso* (535–475 a.C.), uno dei maggiori pensatori presocratici, le cui idee hanno influenzato profondamente larga parte della filosofia occidentale.

Per molti secoli l'idea di infinito rimase confinata ad un impreciso aspetto potenziale, ma già *Zenone di Elea* (489–429 a.C.) con i suoi paradossi aveva evidenziato come l'infinito costituisse un serio problema per la speculazione matematica e filosofica. L'utilizzo di quantità infinitesimali (cioè *piccole quanto si vuole*) fu implicito nei metodi per il calcolo di aree e volumi sviluppati da *Eudosso di Cnido* (408–355 a.C.) e da *Archimede di Siracusa* (287–212 a.C.), e si propagò nel tempo fino all'opera fondamentale di due matematici, che sul finire del XVII secolo segnarono in modo indelebile il pensiero scientifico e filosofico: *Isaac Newton* (1643–1727) e *Gottfried von Leibniz* (1646–1716). Nella sua definizione di *flussione*, Newton spiegava che l'*ultima ratio* di due quantità *evanescenti* “è da intendersi come il rapporto delle quantità, non prima che esse svaniscano, né dopo che sono svanite, ma con il quale esse svaniscono”. Meno comprensibili (e più discutibili) appaiono le spiegazioni fornite da Leibniz dell'uso di quantità infinitamente piccole. Comunque, questi tentativi primordiali di formalizzare l'infinito provocarono numerose reazioni, tra le quali ad esempio quella irridente del filosofo irlandese *George Berkeley* (1685–1753), che nel suo scritto “L'analista: discorso a un matematico infedele” (1734) affermava: “E cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti? Non sono né quantità finite, né quantità infinitamente piccole, ma nemmeno un nulla. Non potremmo chiamarle fantasmi di quantità defunte?”.

Fu *Galileo Galilei* (1564–1642) il primo ad esplorare la possibilità del passaggio dall'*infinito potenziale* all'*infinito attuale*. Infatti, in un punto dei “Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze” (1638), il grande scienziato pisano fa costruire dal suo alter ego *Salviati* una corrispondenza biunivoca tra tutti i numeri naturali e i loro quadrati, concludendo che “ci sono tanti quadrati quanti sono i numeri”. In tal modo, Galilei si riferisce alla collezione dei numeri naturali (ed ovviamente anche a quella dei quadrati) come ad un oggetto in sé, considerando quindi l'infinito nella sua *attualità*, e non più solo nella sua *potenzialità*. Il paradosso galileiano di un insieme in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio fu in seguito trasportato dal *discreto* al *continuo* ad opera di *Bernard Bolzano* (1781–1848), il quale provò che l'intervallo dei numeri reali compresi tra 0 e 1 può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'intervallo dei numeri reali compresi tra 0 e 2.

Nella seconda metà del XIX secolo l'esigenza di rigore e formalizzazione della matematica ebbe infine il sopravvento. *Karl Weierstrass* (1815–1897), considerato da molti il fondatore dell'analisi moderna, fu in grado di rendere precisi i concetti fondamentali dell'analisi infinitesimale, mentre è all'opera geniale e rivoluzionaria (e perciò controversa) del suo allievo *Georg Cantor* (1845–1918) che si deve la grande costruzione della teoria degli insiemi e la scoperta dell'infinito attuale nella sua molteplicità. Cantor introdusse i numeri cardinali, e sviluppò le sue idee utilizzando il confronto tra insiemi.



fig.2 – Georg Cantor con la moglie Vally Guttmann

Ma come confrontare gli insiemi? La prima idea, quasi istintiva, è quella di usare come metodo di confronto tra insiemi l'inclusione, cioè ritenere un insieme S *più piccolo* di un insieme T se ogni elemento di S è anche elemento di T . Ma questa scelta si rivela immediatamente inefficace, in quanto nel confronto mediante l'inclusione la maggior parte delle coppie di insiemi risultano inconfrontabili. E allora la procedura giusta può forse essere quella di contare gli elementi degli insiemi, e ritenere un insieme *più grande* di un altro se è costituito da *più* elementi. Immaginando grossolanamente gli insiemi come contenitori di oggetti, il modo più semplice per confrontarne due con questo metodo *quantitativo* consiste nell'estrarre da ciascuno degli insiemi, come da un'urna, un oggetto alla volta, in modo alternato, fino a che uno dei due, a parità di operazioni effettuate, non si svuota mentre l'altro contiene ancora degli oggetti; in tal caso il primo è l'insieme più piccolo. Può però accadere che gli insiemi da confrontare si svuotino simultaneamente, ed in tal caso essi si possono ritenere *equivalenti* dal punto di vista quantitativo. Certamente occorre formalizzare questo discorso, e soprattutto rendersi conto che un metodo così elementare può funzionare nel

caso degli insiemi finiti, o comunque in qualche senso piccoli, mentre occorre molta cautela qualora si intendano confrontare insiemi che siano grandi o addirittura infiniti. Ad esempio, come si possono contare i punti di un segmento o quelli di un quadrato, e come si possono confrontare gli insiemi costituiti da tali punti?

Nel processo di formalizzazione è necessario in primo luogo stabilire quali insiemi debbano essere considerati equivalenti dal punto di vista quantitativo: due insiemi (non vuoti) S e T si dicono *equipotenti* se è possibile stabilire tra essi una corrispondenza biunivoca, cioè se è possibile far corrispondere in modo univoco ad ogni elemento di S un elemento di T , con la condizione aggiuntiva che ad elementi distinti di S corrispondano elementi distinti di T e che tutti gli oggetti di T siano coinvolti in tale corrispondenza. La collezione di tutti gli insiemi equipotenti all'insieme S è una classe (non un insieme) che chiameremo *numero cardinale* di S . A voler essere precisi il numero cardinale di S andrebbe definito come un particolare oggetto della sua classe di equipotenza (il più piccolo *numero ordinale* in tale classe), ma qui si è preferito procedere in modo *ingenuo*, evitando qualunque accenno a questioni assiomatiche.

Con tali premesse, diremo che un insieme (non vuoto) S è *meno potente* di un insieme (non vuoto) T se esiste una *funzione iniettiva* di S in T , cioè se è possibile far corrispondere univocamente ad ogni elemento di S un elemento di T , in modo tale che ad elementi distinti di S corrispondano elementi distinti di T . È facile provare che l'insieme S è meno potente dell'insieme T se e soltanto se esiste una *funzione suriettiva* di T in S , ovvero una corrispondenza che associ ad ogni elemento di T un elemento di S in modo tale che ogni elemento di S provenga da qualche elemento di T . In questo caso diremo anche che l'insieme T è *più potente* di S . Si ha allora ovviamente che due insiemi equipotenti risultano ciascuno meno potente dell'altro.

Il confronto (quantitativo) appena introdotto tra gli insiemi permette di ordinare i numeri cardinali, ritenendo il numero cardinale di un insieme S *più piccolo* del numero cardinale di un insieme T se esiste una funzione iniettiva da un elemento del cardinale di S ad un elemento del cardinale di T , ovvero se è possibile trovare un'applicazione iniettiva di S in T . Infatti, per provare che in questo modo si ottiene un ordinamento dei numeri cardinali, quel che occorre verificare è che per il confronto quantitativo sussiste una forma di asimmetria. Tale proprietà è garantita dal cosiddetto *teorema di Cantor-Bernstein*:

Siano S e T insiemi non vuoti tali che esistano una funzione iniettiva di S in T ed una funzione iniettiva di T in S . Allora S e T sono equipotenti.

Cantor enunciò questo risultato nel suo famoso lavoro “Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre” (1896), ma proponendone una dimostrazione non soddisfacente; in quel periodo *Felix Bernstein* (1878–1956),



fig.3 – Felix Bernstein

ancora studente liceale, partecipava al seminario che Cantor teneva ad Halle, e si offrì di correggere le bozze del lavoro, accorgendosi della necessità di ritoccare la prova cantoriana, e ottenendone una corretta nel 1897. La dimostrazione di Bernstein fu pubblicata l'anno successivo nelle “Lezioni sulla teoria delle funzioni” di *Émile Borel* (1871–1956). In seguito Bernstein si laureò sotto la guida di Hilbert a Göttingen, e in quella università insegnò fino a quando le vergognose leggi razziali promulgate dal

regime hitleriano non lo costrinsero ad emigrare negli Stati Uniti.

È di estrema importanza osservare che l'ordinamento tra numeri cardinali ottenuto mediante il confronto quantitativo di insiemi è *totale*, nel senso che due qualunque numeri cardinali sono confrontabili. Evidentemente, questa proprietà equivale al seguente enunciato, noto come *teorema di Hartogs* o *teorema di tricotomia*.

Qualunque siano gli insiemi non vuoti S e T , esiste una funzione iniettiva di S in T oppure esiste una funzione iniettiva di T in S .

Anche questo risultato fu enunciato, senza dimostrazione, da Cantor nel 1895. In seguito, in una lettera del 28 luglio 1899, indirizzata a *Richard Dedekind* (1831–1916), Cantor scrisse che esso può essere ottenuto come conseguenza del principio del buon ordinamento. Fu solo nel 1915 che *Friedrich Hartogs* (1874–1943), allora professore straordinario all'università di München, riuscì a provare che il teorema di tricotomia è di fatto equivalente al principio del buon ordinamento, e quindi all'assioma della scelta.



fig.4 – Friedrich Hartogs

Anche Hartogs era di origine ebraica e, dopo la *notte dei cristalli* (10 novembre 1938), fu internato per alcune settimane nel campo di concentramento di Dachau. Dopo il rilascio dal lager fu costretto a subire gravi umiliazioni, che lo spinsero infine al suicidio nell'agosto 1943.

È facile capire che il numero cardinale di un insieme finito può essere identificato con l'ordine dell'insieme. Ma quali e quanti sono i numeri cardinali degli insiemi infiniti? Il primo che si incontra è $\aleph_0$, il numero cardinale dell'insieme dei numeri naturali (e quindi di un qualunque insieme numerabile, ed in particolare dell'insieme dei numeri interi e di quello dei numeri razionali), che è più piccolo di ogni altro numero cardinale infinito. Ma Cantor riuscì a dimostrare che l'insieme dei numeri reali non può essere messo in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri naturali (cioè non è numerabile), e quindi il suo numero cardinale è strettamente più grande di $\aleph_0$. Che tale numero cardinale sia oppure no consecutivo ad $\aleph_0$ è il problema (*ipotesi del continuo*) che ha ossessionato Cantor per lunghi tratti della sua vita, senza che egli riuscisse a risolverlo. Oggi sappiamo, grazie ai fondamentali contributi di *Kurt Gödel* (1906–1978) e *Paul Cohen* (1934–2007), che tale questione non ammette soluzione, cioè essa è *indecidibile* all'interno della teoria degli insiemi *ZFC*, costruita usando il sistema assiomatico introdotto da *Ernst Zermelo* (1871–1953) e *Adolf Fraenkel* (1891–1965), con l'aggiunta dell'assioma della scelta.

Proseguendo nella sua ricerca di numeri cardinali sempre più grandi, Cantor osservò che l'insieme dei punti di un segmento ha lo stesso numero cardinale dell'insieme dei punti di un quadrato, stupendosi egli stesso di tale risultato: “Je le vois, mais je ne le crois pas”, scrisse in francese il 29 giugno 1877 in una lettera a Dedekind. Con un argomento semplice ma brillante, Cantor fu infine in grado di provare che esiste una gerarchia illimitata di numeri cardinali infiniti. La sua dimostrazione è molto breve e interessante, ed è perciò il caso di raccontarla.

Si supponga che esista una funzione suriettiva φ da un insieme S all'insieme $P(S)$ costituito da tutte le parti di S , e si consideri il sottoinsieme X_0 di S costituito da tutti gli oggetti x che non appartengano alla propria immagine $\varphi(x)$. Esiste quindi un elemento x_0 di S tale che $\varphi(x_0) = X_0$. Ma allora, per la definizione stessa dell'insieme X_0 , si ha che da $x_0 \in X_0$ segue $x_0 \notin X_0$ mentre da $x_0 \notin X_0$ si deduce $x_0 \in X_0$. Questa evidente contraddizione prova che una siffatta funzione φ non può esistere, per cui il numero cardinale di $P(S)$ è necessariamente più grande di quello di S . Pertanto la sequenza di insiemi

$$S, P(S), P(P(S)), P(P(P(S))), \dots$$

determina una sequenza di numeri cardinali sempre più grandi, e quindi per ogni numero cardinale $\aleph$ è possibile trovare una sequenza strettamente crescente di numeri cardinali maggiori di $\aleph$.

È opportuno osservare come il tipo di dimostrazione proposto da Cantor per questo risultato è sostanzialmente un *αντιστρέφον*, argomento logico già in uso nella Grecia classica, che porta a stabilire l'equivalenza tra un'affermazione e la sua negazione, e conduce quindi ad una contraddizione insanabile.

Un esempio significativo di *αντιστρέφον* è riportato da *Aulo Gellio* (125–180) nelle “*Noctes Atticæ*”, dove viene narrata la disputa tra il sofista *Protagora di Abdera* (486–411 a.C.) ed il suo allievo *Euathlos*. Quest'ultimo infatti rifiutava di pagare al grande filosofo il compenso pattuito per le lezioni di retorica ricevute, ed allora Protagora gli propose di provvedere al pagamento se avesse vinto nella prima causa in cui si sarebbe dovuto difendere. Euathlos accettò, e il giorno seguente Protagora lo citò in tribunale per far valere le sue ragioni, ritenendo che in tal modo, qualunque fosse stata la decisione del tribunale, avrebbe ottenuto il pagamento. Ma Euathlos, rivolgendosi ai giudici, e dimostrando di avere ben assimilato gli insegnamenti del maestro, osservò che, al contrario, in nessun caso e per le stesse ragioni, egli avrebbe dovuto pagare. I giudici, non riuscendo in nessun modo ad uscire da questa impasse logica, rinviarono indefinitamente ogni decisione.

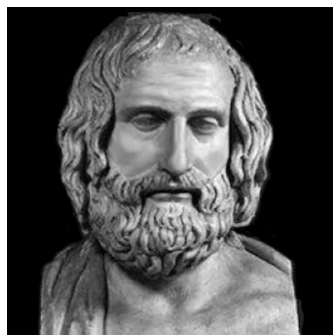


fig.5 – Protagora di Abdera

Le idee di Cantor avevano irrimediabilmente squarciato il velo polveroso che da tanto, troppo tempo copriva l'infinito e impediva l'evoluzione della conoscenza. Da quel momento la matematica non poteva essere, e non sarebbe stata più, la stessa.

Ma è ben noto che i sistemi di potere (che siano di natura sociale, politica, economica o culturale) non tollerano la trasgressione all'ordine costituito e tendono a reprimerla con durezza spesso inaudita. E il sistema accademico-scientifico non fa eccezione, basti pensare alle storie emblematiche di *Évariste Galois* (1811–1832), padre dell'algebra moderna, del biologo austriaco *Paul Kammerer* (1880–1926) e del medico ungherese *Ignác Semmelweis* (1818–1865). E anche nel caso delle innovative teorie cantoriane la

reazione del potere conservatore non si fece attendere, e fu durissima. Matematici di grande prestigio attaccarono in modo esplicito le nuove idee. Ad esempio, *Henri Poincaré* (1854–1912) affermò di ritenere la teoria di Cantor “una malattia, un bizzarro stato di malessere da cui un giorno la matematica sarebbe guarita”. La previsione e la speranza di Poincaré si rivelarono però errate, e la guarigione da questa *brutta malattia* sembra per fortuna ancora molto lontana.

L'aggressione più violenta e concreta nei confronti di Cantor e delle sue teorie fu sicuramente quella di *Leopold Kronecker* (1823–1891), il quale occupava una posizione di grande prestigio all'università di Berlino e fu un precursore dell'*intuizionismo*. Kronecker dichiarò più volte che “Dio ha creato i numeri interi, e tutto il resto è opera dell'uomo”, e questa posizione radicale lascia capire perché egli ritenesse inammissibile l'uso dei numeri irrazionali e ancor di più l'indagine sull'infinito. Al punto di definire Cantor un “corruttore della gioventù” e ritenere vuoto il suo contributo matematico. Egli evitò con tutti i mezzi che Cantor potesse ottenere una cattedra a Berlino, costringendolo di fatto a svolgere tutta la sua attività a Halle, in una sede che Cantor considerò sempre come periferica rispetto al mondo della ricerca matematica. Kronecker cercò di impedire, o almeno rallentare, la pubblicazione dei lavori di Cantor su riviste di grande rilevanza quali il “*Journal für die reine und angewandte Mathematik*” (il famoso *Crelle's journal*); in più, con un meschino espediente ottenne che si incrinasse il rapporto di amicizia tra Cantor e il matematico svedese *Gustaf Mittag Leffler* (1846–1927), uno dei pochi che aveva sostenuto ed incoraggiato le ricerche di Cantor, pubblicando alcuni dei suoi più importanti contributi nella sua rivista “*Acta Mathematica*”. Lo scopo di Kronecker era appunto quello di chiudere al suo avversario le porte anche del prestigioso periodico svedese.



fig.6 – Leopold Kronecker

L'ottusa ostilità di Kronecker ebbe un effetto dirompente sulla fragilità psichica di Cantor. Egli ebbe la prima grave crisi depressiva nel 1884, che riuscì a superare dopo alcuni mesi senza uno specifico aiuto terapeutico. In seguito le condizioni mentali di Cantor peggiorarono, rendendo necessari diversi ricoveri nella clinica psichiatrica dell'università di Halle, dove infine morì il 6 gennaio 1918. Oggi sappiamo che la patologia di Cantor era plausibilmente dovuta sia a fattori ambientali che genetici, ma non è possibile

stabilire quanto la persecuzione perpetrata da Kronecker nei suoi confronti abbia contribuito ad alienare una delle più prodigiose menti matematiche e filosofiche di tutti i tempi.

D'altra parte, la posizione arrogante e intransigente di Kronecker nei confronti dei numeri irrazionali e dell'uso dell'infinito (anche potenziale) lo aveva già portato ad una profonda divergenza anche con Weierstrass, che si inasprì in seguito ai continui attacchi a Cantor. Potrebbe sembrare il canonico conflitto tra eminenti esponenti di due discipline vicine ma rivali, da una parte l'algebra e il discreto, rappresentati da Kronecker, e dall'altra l'analisi e il continuo, incarnati da Weierstrass. Si trattava invece dello scontro tra concezioni filosofiche profondamente diverse della matematica, che non dipendevano dalle tematiche coinvolte. In più, tale scontro era aggravato dagli aspetti caratteriali di Kronecker, che aveva certamente eccellenti capacità matematiche, ma a cui mancavano le qualità umane necessarie per essere un grande matematico: la grandezza di un matematico (o di uno scienziato nel senso più ampio) non può prescindere dalla sua grandezza umana.

Anche il matematico italiano *Federigo Enriques* (1871–1946) espresse una valutazione negativa sul lavoro di Cantor, argomentando così in un suo scritto del 1912: “Il tentativo di superare il campo delle matematiche così determinato in rapporto alla possibilità effettiva della costruzione mentale ha condotto Giorgio Cantor a porre come dati alcuni concetti che gli spiriti critici non possono ritenere in alcun modo definiti; tale per esempio il numero alef-uno che corrisponde al concetto della totalità delle serie numerabili. La debolezza della posizione di quei pochi matematici [...] che considerano effettivamente dati siffatti concetti, si rivela nei cosiddetti paradossi della teoria degli insiemi”.



fig.7 – Federigo Enriques

La critica di Enriques fu rivolta anche agli altri matematici impegnati nella costruzione del mirabile edificio della teoria degli insiemi. In particolare, a proposito del principio del buon ordinamento di Zermelo, egli dichiarò nel 1924: “Ebbene, il meno che si possa osservare è che questa legge non è legge per tutte le menti. Onde accade in fatto che le dimostrazioni con cui si dovrebbe rispondere al dubbio se il continuo possa essere ben ordinato non hanno forza di convincere nessuno di quelli che veramente ne dubitano”.

Naturalmente non mancarono matematici di grande carisma che presero le difese di Cantor e delle sue idee. Oltre al già citato Weierstrass, anche Hilbert ebbe una posizione chiarissima in difesa della nuova teoria dichiarando che “nessuno ci cacerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi”. Mi sembra anche significativo menzionare un brano del discorso pronunciato dallo stesso Hilbert il 4 giugno 1925, in occasione del congresso organizzato dalla *Società Matematica della Westfalia* in onore di Weierstrass.

“L’analisi da sola, però, non ci offre la migliore comprensione della natura dell’infinito: a fornircela è, piuttosto, una disciplina che si avvicina maggiormente a un pensiero filosofico generale, e che è stata ideata per gettare nuova luce sull’intero complesso di questioni relative all’infinito. Questa disciplina, creata da Georg Cantor, è l’insiemistica. Qui ci interessa solamente quella parte unica e originale dell’insiemistica che rappresenta il nocciolo della dottrina di Cantor, e cioè la teoria dei numeri *transfiniti*: una teoria che, a mio avviso, costituisce il frutto più squisito dello spirito matematico, nonché una delle somme conquiste dell’attività puramente intellettuale dell’uomo”.



fig.8 – David Hilbert

Nello stesso discorso, Hilbert celebrava la grandezza della costruzione cantoriana con la frase: “Così, grazie alla titanica collaborazione tra Frege, Dedekind e Cantor, l’infinito fu glorificato e visse un’epoca di grande trionfo. Spiccando un volo audace, l’infinito aveva raggiunto l’apice vertiginoso del successo”.

3 Cardinali eliminabili

Ma è arrivato il momento di tornare a quello che sembrava, e doveva essere, l’argomento di questo articolo. Perché, anche se - come ho già detto - cercavo solo un pretesto per parlare a ruota libera di Cantor e dell’infinito, qualche parola andrà pur spesa per giustificare il titolo che ho dato al lavoro. Ebbene, ci sono problemi in matematica in cui l’analisi di insiemi con una certa cardinalità elevata $\aleph$ può essere omessa, purché sia chiaro quel che avviene per insiemi con cardinalità minore di $\aleph$, ed in tal senso $\aleph$ può essere “ucciso” dai cardinali che lo precedono. Situazioni di questo tipo possono verificarsi nello studio di strutture matematiche di varia natura. Si cercherà qui di illustrare brevemente questa tematica nel caso della teoria dei gruppi;

la scelta di questa struttura è ovviamente legata in modo esclusivo al gusto personale dell'autore, ma non dovrebbe limitare la comprensione della problematica.

Nel 1962 *Reinhold Baer* (1902–1979), uno dei più importanti algebristi del ventesimo secolo, introdusse il concetto di contabile riconoscibilità per i gruppi: una proprietà $\mathcal{P}$ relativa ai gruppi si dice *contabilmente riconoscibile* se essa è verificata da un qualunque gruppo (non numerabile) G tale che $\mathcal{P}$ valga per ogni sottogruppo contabile (cioè finito o numerabile) di G . Il primo banale esempio di proprietà contabilmente riconoscibile è la commutatività, ma più in generale tale è ogni proprietà *locale*, cioè trasmissibile dai sottogruppi finitamente generati all'intero gruppo; questa osservazione discende dal fatto che in un qualunque gruppo i sottogruppi generati dalle parti finite sono contabili.

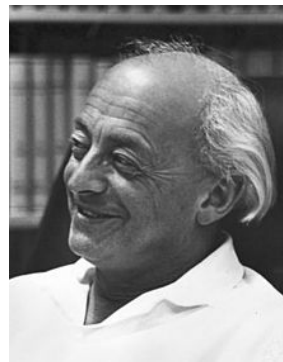


fig.9 – Reinhold Baer

Se una proprietà grupitale $\mathcal{P}$ è contabilmente riconoscibile, allora, nell'ambito della teoria dei gruppi e relativamente allo studio di tale proprietà, possiamo dire che il comportamento dei numeri cardinali infiniti e non numerabili (cioè quelli maggiori di $\aleph_0$) è trascurabile. In tale senso si può allora affermare che, nella situazione che abbiamo delimitato, il primo numero cardinale infinito $\aleph_0$ (con la complicità dei numeri cardinali finiti, cioè dei numeri naturali) elimina tutti gli altri cardinali infiniti. Baer riuscì a provare che molte importanti proprietà grupitali (in particolare la risolubilità e la nilpotenza), pur non essendo locali, sono contabilmente riconoscibili.

Ma già venti anni prima, *Sergei N. Černikov* (1912–1987), uno dei maggiori esponenti della scuola sovietica di teoria dei gruppi, aveva per primo forzato $\aleph_0$ ad *uccidere* gli altri cardinali infiniti in un'importante situazione, provando che l'ipercentralità di un gruppo è contabilmente riconoscibile. Dopo i pionieristici contributi di Černikov e di Baer, numerose altre proprietà grupitali contabilmente riconoscibili sono state scoperte, ed infine una classificazione ragionevolmente completa di tali proprietà è stata recentemente ottenuta dalla scuola algebrica napoletana.



fig.10 – Sergei N. Černikov

Vorrei infine menzionare che esistono situazioni duali in cui sono i numeri cardinali più grandi ad eliminare i più piccoli. È ad esempio possibile provare che se $\aleph$ è un numero cardinale sufficientemente *regolare* e maggiore di $\aleph_0$, e G è un gruppo di cardinalità $\aleph$ i cui sottogruppi propri di cardinalità $\aleph$ sono nilpotenti, allora G stesso è nilpotente (almeno in assenza di quozienti semplici infiniti). Pertanto in questa situazione il comportamento dei sottogruppi di cardinalità minore di $\aleph$ è trascurabile, e quindi $\aleph$ è in grado di eliminare tutti i cardinali che lo precedono.

Sull'insegnamento delle frazioni nella scuola secondaria

di Margherita Guida*, Carlo Sbordone†

Le frazioni rappresentano, per gli allievi della scuola secondaria di primo grado, la prima occasione impegnativa di ricorso all'astrazione, ed è proprio in questa fase che si verificano, su larga scala, fenomeni di incomprensione. La matematica che si insegna a scuola viene sì dai pensatori del passato ed è perfettamente collaudata, ma la sua trasmissione ai giovani ha molti gradi di libertà e risente dell'evoluzione del mondo, non solo per le continue scoperte fatte nei laboratori e nei centri di ricerca, ma anche per le novità messe a disposizione dalla tecnologia. Spesso la matematica è concepita come un insieme di tecniche risolutive, l'idea della matematica come edificio coerente e strutturato della conoscenza non sempre viene comunicata allo studente. Per trasferire il senso della struttura organizzata della matematica agli studenti una delle occasioni migliori è quella di fornire un quadro chiaro e coerente del sistema dei numeri, spiegare in modo semplice come si passa dall'insieme dei numeri naturali all'insieme dei numeri interi, e quindi all'insieme dei numeri frazionari.

In genere, quando si presenta il sistema dei numeri, la definizione di **“frazione”** non sempre appare chiara, anche perchè spesso si attribuiscono tre significati alla parola **“frazione”**: **parte di un tutto, quoziente, rapporto**.

Quando si definisce una **“frazione”** come:

Parte di un tutto: la frazione $\frac{m}{n}$ sta ad indicare che un “tutto” è stato partizionato in n parti uguali e ne sono state considerate m . Ad esempio, $\frac{2}{3}$ di un biscotto è la parte di biscotto costituita da 2 pezzi, quando il biscotto è diviso in 3 parti uguali. In particolare, se $m = 1$, e se il “tutto” può essere diviso in n parti uguali, allora $\frac{1}{n}$ del “tutto” coincide con una di quelle parti.

*I.S.I.S. “Elena di Savoia”, Largo S. Marcellino 15, 80138 Napoli, Italia. Email: maguida@unina.it

†Università degli Studi di Napoli “Federico II”. Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”, Complesso Monte S. Angelo - Via Cintia, 80126 Napoli, Italia. Email: sbordone@unina.it

In generale, se $m \geq 1$ la frazione $\frac{m}{n}$ del “tutto” è costituita da m (di quelle parti) cioè da m parti ognuna delle quali è $\frac{1}{n}$ del “tutto”.

Quindi, il numeratore m della frazione $\frac{m}{n}$ del “tutto” ci dice *il numero delle parti*, mentre il denominatore n della frazione ci dice *che tipo di parti* sono state considerate (mezzi, terzi, quarti, quinti, ...);

Quoziente: la frazione $\frac{m}{n}$ si considera come $m : n$ (anche qui c'è l'idea di partizione). Ad esempio, $2 : 3$ è la quantità di biscotto che ciascuno riceve se 2 biscotti identici sono ripartiti equamente tra 3 persone;

Rapporto: la frazione $\frac{m}{n}$ è letta come un rapporto (ci sono m oggetti ogni n oggetti). Ad esempio, dire che il rapporto tra uomini e donne in un ufficio è 3 a 2 significa dire che se U è il numero di uomini e D è il numero di donne, allora il rapporto tra U e D è $\frac{3}{2}$.

Tuttavia, questi significati attribuiti alla parola “frazione” non sono sempre soddisfacenti e generano molte perplessità negli studenti:

- Quando si parla di parte di un “tutto” non è chiaro cos'è un “tutto”, ad esempio, nella figura in basso (Fig.1) la parte tratteggiata rappresenta $\frac{4}{3}$ o $\frac{4}{6}$?



Figura 1: Frazioni come parte di un tutto

Non è possibile rispondere a questa domanda se non si precisa qual'è “il tutto”.

La parte tratteggiata è $\frac{4}{3}$ del rettangolo di sinistra, ma è anche $\frac{4}{6}$ del complesso dei due rettangoli, cioè dell'unione dei due rettangoli;

- Quando si parla di “rapporto” non sempre gli studenti sanno già cos'è un rapporto, e non comprendono il legame con parte di un “tutto”;
- Quando si fa $m : n$ si ha l'idea di una divisione quando m è multiplo di n , ma non si sa ancora cosa significa $m : n$ in caso contrario;
- Non è chiaro cosa significa addizionare, sottrarre, moltiplicare e dividere parte di un “tutto”, un quoziente o un rapporto.

Da questa breve analisi appare evidente che occorre dare una definizione chiara ma allo stesso tempo rigorosa di “frazione”.

1 Frazioni: punti della retta dei numeri

L'esplorazione iniziale di frazioni può consistere in una *raccolta di dati* occorre però ad un certo punto *mettere i dati in un contesto teorico*. Le pizze e le torte, con cui per anni sono state spiegate le frazioni, possono essere utili ai primissimi livelli per apprendere il vocabolario, diventano *inadeguate* per rappresentare frazioni maggiori di 1 o per moltiplicare. Le frazioni rappresentano per un bambino la prima visita nella matematica astratta, quanto e come apprendono i ragazzini in questa fase gli resterà dentro per tutta la vita. Pertanto, vediamo ora come presentare, a studenti della scuola secondaria di primo grado, le frazioni come punti della retta dei numeri, introducendo prima la retta dei numeri e dando poi la definizione di frazione.

La retta dei numeri

Considerata una retta r , fissiamo un suo punto e indichiamolo con 0 (zero):



Figura 2: Retta dei numeri

Scegliamo a destra di 0 un altro punto della retta e indichiamolo con 1 (uno):



Figura 3: Retta dei numeri

La distanza tra 0 e 1 costituisce l'unità di misura per localizzare altri punti, chiamiamo **segmento unitario** il segmento avente per estremi 0 e 1 (Fig.3). Per disegnare altri numeri a destra di 1, spostiamo il segmento unitario verso destra finché il punto 0 vada a coincidere con il suo estremo destro (ossia 1) e indichiamo con 2 (due) il nuovo estremo destro così ottenuto (Fig.4):



Figura 4: Retta dei numeri

procedendo in modo analogo otteniamo 3, 4, ...

Definizione 1.1 *Un numero naturale è uno dei punti indicati sulla retta dopo lo zero. La retta con l'insieme dei numeri naturali si chiama **retta dei numeri**.*

Un numero naturale è così definito in maniera concreta ed esplicita: è uno dei punti disegnati sulla retta dei numeri.

Osservazione 1.2 *Questa definizione non è l'ideale ma è accessibile a chiunque e facilita lo studio dei numeri frazionari.*

Le frazioni come punti della retta dei numeri

Definiamo ora le frazioni come punti della retta dei numeri partendo dalla sequenza dei terzi.

Se **a** e **b** sono due punti sulla retta dei numeri, con **a** alla sinistra di **b**

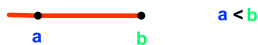


Figura 5: Segmento di estremi **a** e **b**

con **[a, b]** indichiamo il segmento di estremi **a** e **b**.

Dato il segmento di estremi 0 e 1 ossia $[0, 1]$ che sarà il segmento unitario, la sua lunghezza è il “tutto”, il punto 1 è l’unità.

Per costruire la sequenza dei terzi, dividiamo il segmento unitario $[0, 1]$ in tre parti di uguale lunghezza:

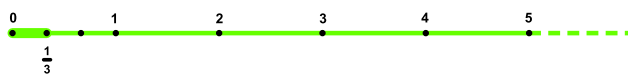


Figura 6: Costruzione sequenza dei terzi

la lunghezza del segmento in grassetto (Fig.6) è indicata dall’estremo destro di tale segmento, in questo caso è $\frac{1}{3}$ ossia un terzo del tutto.

Analogamente, dividiamo in tre parti di uguale lunghezza tutti i segmenti $[1, 2], [2, 3], \dots$ e così otteniamo la sequenza dei terzi:



Figura 7: Sequenza dei terzi

Ogni punto della sequenza (Fig.7) misura la sua distanza da zero, ad esempio $\frac{7}{3}$ è la lunghezza di $[0, \frac{7}{3}]$, ma $\frac{7}{3}$ è anche 7 volte la lunghezza di $[0, \frac{1}{3}]$, e inoltre $\frac{7}{3}$ è la settima frazione, nella sequenza dei terzi, a destra di zero.

I numeri $\frac{m}{3}$ sono i multipli di $\frac{1}{3}$ al variare di $m \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.3 *Dati i numeri naturali m ed n , costruiamo la sequenza degli n -simi: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$, dividendo i segmenti $[0, 1], [1, 2], [2, 3], \dots$ in n parti uguali.*

La frazione $\frac{m}{n}$ è l' m -simo punto, nella sequenza degli n -simi, a destra di zero.

Notiamo che fissato $n \in \mathbb{N}$, al variare di $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si ottengono tutti i multipli interi positivi $\frac{m}{n}$ di $\frac{1}{n}$ e zero. Esattamente come per $n = 1$ al variare di $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si ottengono tutti gli interi positivi m e zero.

Osservazione 1.4 *Questa definizione di frazione, confrontata con quella tradizionale che si basa su un pezzo di pizza o una fetta di torta è più facile da applicare: abbiamo scelto di ripartire un segmento in n parti di uguale lunghezza piuttosto che un cerchio in n parti congruenti.*

Osservazione 1.5 *Possiamo suddividere il segmento unitario con il metodo classico delle proiezioni parallele, basato sul Teorema di Talete, oppure con il metodo ricorsivo illustrato di seguito. Tale metodo è una versione semplificata dell'algoritmo scoperto in classe da due ragazzi americani, Daniel Litchfield e Dave Goldenhein, che con l'aiuto dell'insegnante Charles Dietrich pubblicarono nel 1997 un articolo su Mathematics Teacher ([1]).*

Versione semplificata algoritmo C.Dietrich, D.Goldenhein, D.Litchf

Sia AB il segmento unitario $[0;1]$, per determinare la posizione di $\frac{1}{3}$

- Costruiamo il quadrato $ABCD$
- Tracciamo le diagonali DB e AC
- Detto V il punto di incontro delle diagonali, indichiamo con M la proiezione ortogonale di V su AB
- Il punto M sarà il punto medio di AB e quindi M corrisponderà ad $\frac{1}{2}$

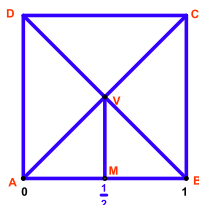


Figura 8: Determinazione posizione di $\frac{1}{2}$ del segmento unitario

Per determinare la posizione di $\frac{1}{3}$

- Congiungiamo il punto D con il punto M
- Detto G il punto di incontro di DM con AC , indichiamo con H la proiezione ortogonale di G su AB e con F la proiezione ortogonale di G su CD

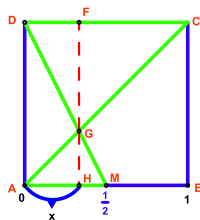


Figura 9: Determinazione posizione di $\frac{1}{3}$ del segmento unitario

Per la similitudine dei triangoli AGM e CGD (vedi Fig.9) otteniamo:

$$GH : GF = AM : CD$$

posto $AH = x$ abbiamo

$$x : (1 - x) = \frac{1}{2} : 1 \implies x = \frac{1}{3}$$

Con analogo procedimento si determinano $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

Osservazione 1.6 Uno dei vantaggi di avere una definizione precisa di frazione è che si può facilmente introdurre una definizione di ordine (stretto).

Definizione 1.7 La frazione $\frac{m}{n}$ è minore di $\frac{m'}{n'}$, se e solo se, $\frac{m}{n}$ è a sinistra di $\frac{m'}{n'}$ sulla retta dei numeri.

Si noti che tradizionalmente, per decidere se $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$, si deve calcolare un comune denominatore, ad esempio per provare che $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ si deve usare $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$.

Frazioni decimali

Si chiamano frazioni decimali le frazioni con denominatore potenze positive di 10, ad esempio: $\frac{3619}{10^2}, \frac{12200}{10^4}, \dots$

Notiamo, che tali numeri si possono scrivere rispettivamente come 36.19, 1.2200, facendo uso del punto decimale che tiene conto della potenza di 10 che figura al denominatore.

Nel numero 1.2200 si possono eliminare gli zeri finali pervenendo a scrivere:

$$1.2200 = 1.22$$

ma questo equivale a verificare che:

$$\frac{12200}{10^4} = \frac{122}{10^2}$$

e ciò richiede una dimostrazione.

Teorema 1.8 (sulla semplificazione di frazioni)

Dati $m, n, l \in \mathbb{N}$ risulta:

$$\frac{m}{n} = \frac{lm}{ln}$$

Dim. Proviamo il teorema in un caso particolare, consideriamo $m = 3$, $n = 2$, $l = 4$, ossia: $\frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{4 \times 2}$.

Sulla retta dei numeri consideriamo la sequenza dei mezzi:

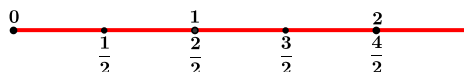


Figura 10: Sequenza dei mezzi

Dividiamo in 4 parti uguali ciascun segmento tra punti consecutivi della sequenza dei mezzi, in tal modo ognuno dei segmenti $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $\dots$ è così ripartito in 8 parti uguali e si ottiene la sequenza degli ottavi:

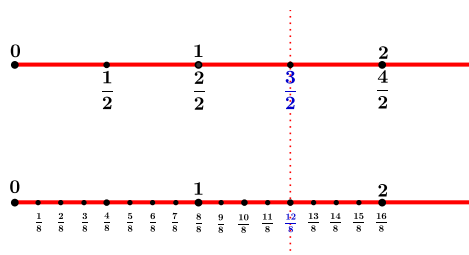


Figura 11: Confronto sequenza dei mezzi e degli ottavi

La frazione $\frac{3}{2}$ che è il terzo punto nella sequenza dei mezzi è ora il dodicesimo punto nella sequenza degli ottavi, ossia $\frac{12}{8} = \frac{4 \times 3}{4 \times 2}$.

Mediante il **Teorema sulla semplificazione di frazioni** si può giustificare l'uguaglianza:

$$1.2200 = 1.22$$

Ricordando che per definizione

$$1.2200 = \frac{12200}{10^4}$$

si ha

$$1.2200 = \frac{122 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2} = \frac{122}{10^2} = 1.22$$

Pertanto si possono aggiungere o togliere zeri all'estrema destra del punto decimale, lasciando inalterato il numero decimale.

Osservazione 1.9 Abbiamo preso atto del fatto che l'uguaglianza

$$(*) \quad \frac{ml}{nl} = \frac{m}{n}$$

equivale a dire che le due frazioni al primo e secondo membro corrispondono allo stesso punto della retta dei numeri.

Quindi, mentre di solito si caratterizza $(*)$ dicendo che $\frac{ml}{nl}$ e $\frac{m}{n}$ sono frazioni equivalenti, per noi esse sono uguali.

Da queste considerazioni, appare chiaro che due applicazioni del Teorema sulla semplificazione di frazioni che si utilizzano spesso sono le seguenti:

- 1) gli zeri finali dopo il punto decimale si possono sopprimere;
- 2) due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ possono essere ridotte allo stesso denominatore bd , cioè:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}.$$

Ciò vuol dire che posto $n = b \cdot d$, allora le due frazioni $\frac{a}{b} = \frac{ad}{n}$,

$\frac{c}{d} = \frac{bc}{n}$ fanno parte della sequenza degli n -simi, rispettivamente nella posizione ad -sima e bc -sima.

Pertanto, si può dire che se $ad < bc$ allora $\frac{ad}{n}$ è a sinistra di $\frac{bc}{n}$ cioè

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Teorema 1.10 *(sulle frazioni ridotte ai minimi termini)*

Per ogni frazione, ne esiste un'unica, ad essa uguale, che sia ridotta ai minimi termini.

Dim. La dimostrazione non è banale, si basa sull'Algoritmo di Euclide.

Osservazione 1.11 Per le considerazioni fatte appare chiaro che preferire

$\frac{4}{3}$ a $\frac{16}{12}$ è una questione di gusti e non una necessità matematica.

Operazioni con le frazioni

Introduciamo le operazioni tra frazioni usando la retta dei numeri.

Nel caso dell'**addizione di frazioni** partiamo dal seguente esempio.

Esempio 1.12 La somma dei numeri interi 3 e 5 ossia $3 + 5$ è la lunghezza dell'unione che chiamiamo concatenazione dei due segmenti adiacenti di lunghezza rispettivamente 3 e 5

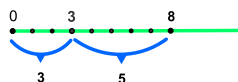


Figura 12: Somma di 3 e 5

Tenendo conto del fatto che i numeri interi corrispondono a particolari frazioni, concettualmente la definizione di somma di frazioni non potrà essere diversa da quella illustrata nell'Esempio 1.12.

Definizione 1.13 Date due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{l}$, la loro somma $\frac{m}{n} + \frac{k}{l}$ è la lunghezza della concatenazione dei due segmenti adiacenti di lunghezza rispettivamente $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{l}$.

Esempio 1.14 La somma delle frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{l}$ è la lunghezza del segmento in figura:

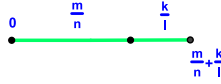


Figura 13: Somma di $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{l}$

cioè $\frac{m}{n} + \frac{k}{l}$ è la lunghezza della concatenazione di due segmenti adiacenti, uno di lunghezza $\frac{m}{n}$ e l'altro di lunghezza $\frac{k}{l}$.

Dalla definizione di somma di due frazioni $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$ segue che valgono la proprietà associativa:

$$\left(\frac{k}{l} + \frac{m}{n}\right) + \frac{p}{q} = \frac{k}{l} + \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)$$

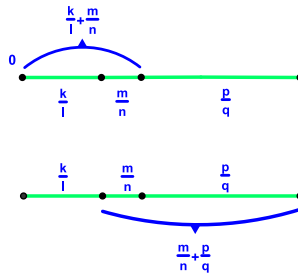


Figura 14: Proprietà associativa

e la proprietà commutativa:

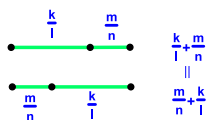


Figura 15: Proprietà commutativa

Teorema 1.15 (*sull' addizione di frazioni*)

Date due frazioni $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$ la loro somma è data da:

$$\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = \frac{kn + lm}{ln}$$

Dim. Dalla definizione di somma segue:

$$\frac{k}{l} = \underbrace{\frac{1}{l} + \dots + \frac{1}{l}}_{k - \text{volte}}$$

e quindi nel caso particolare ($l = n$)

$$(**) \quad \frac{k}{l} + \frac{m}{l} = \frac{k + m}{l}$$

In generale, se i denominatori l ed n sono diversi, per eseguire l'addizione di $\frac{k}{l}$ con $\frac{m}{n}$:

$$\frac{k}{l} + \frac{m}{n}$$

prima riscriviamo $\frac{k}{l}$ come $\frac{kn}{ln}$ e $\frac{m}{n}$ come $\frac{lm}{ln}$, usando il Teorema sulla “semplificazione di frazioni”, poi usiamo (**):

$$\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = \frac{kn}{ln} + \frac{lm}{ln} = \frac{kn + lm}{ln}$$

.

Esempio 1.16

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} + \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 7 + 6 \cdot 3}{6 \cdot 7} = \frac{53}{42}$$

Moltiplicazione di frazioni

Esaminiamo la moltiplicazione di frazioni partendo dal seguente esempio:

Esempio 1.17 *Dati i numeri interi 3 e 5 il prodotto di 3 per 5 ossia $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$ sulla retta dei numeri è:*

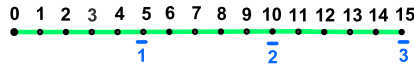


Figura 16: Retta con unità di misura uguale a 5

3×5 è il punto $\overline{3}$ sulla retta con unità di misura uguale a 5 e cioè: $3 \times 5 = 15$.

A differenza del caso dei numeri interi, la moltiplicazione di frazioni non è addizione ripetuta, ad esempio $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$ non può voler dire “addizionare $\frac{1}{4}$ a se stesso $\frac{3}{5}$ volte”.

Definendo $\frac{3}{5}$ di un numero $\underline{a}$ come la totalità di 3 parti, quando $\underline{a}$ è diviso in 5 parti uguali, allora $\frac{3}{5}$ di $\frac{1}{4}$ si ottiene dividendo il segmento $[0, \frac{1}{4}]$ in 5

parti uguali e prendendo la lunghezza dell'unione di 3 di tali parti:

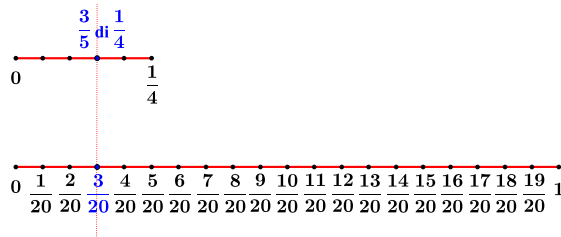


Figura 17: Sequenza dei ventesimi

Inoltre, se dividiamo il segmento $[0, 1]$ in 20 parti uguali, come si può osservare dalla Figura17, si ha che $\frac{3}{5}$ di $\frac{1}{4}$ corrisponde a $\frac{3}{20}$ di 1.

Definizione 1.18 *Date due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{l}$, il prodotto $\frac{m}{n} \times \frac{k}{l}$ ossia $\frac{m}{n}$ di $\frac{k}{l}$ è uguale alla totalità di m parti, quando il segmento $[0, \frac{k}{l}]$ è diviso in n parti uguali.*

Teorema 1.19 (sulla moltiplicazione di frazioni)

Date due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{l}$ il loro prodotto è dato da:

$$\frac{m}{n} \times \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}$$

Dim. Per il Teorema sulla “semplificazione di frazioni”

$$\frac{m}{n} = \frac{ml}{nl} = \frac{m + \dots + m}{nl} = \underbrace{\frac{m}{nl} + \dots + \frac{m}{nl}}_l$$

$\frac{m}{n}$ è la lunghezza dell'unione di l parti ciascuna lunga $\frac{m}{nl}$. Allora, la lun-

ghezza dell'unione di k di quelle parti è $\frac{mk}{nl}$.

La divisione di frazioni

Talvolta la definizione di divisione di frazioni viene data utilizzando il Teorema sulla semplificazione di frazioni:

$$\frac{\frac{k}{l}}{\frac{m}{n}} = \frac{\frac{k}{l} \times ln}{\frac{m}{n} \times ln} = \frac{\frac{kl n}{l}}{\frac{ml n}{n}} = \frac{kn}{lm} = \frac{k}{l} \cdot \frac{n}{m}$$

Tale modo di procedere per definire $\frac{\frac{k}{l}}{\frac{m}{n}}$, spesso sintetizzato dall'espressione **“Inverti e Moltiplica”**, non è corretto, perchè si basa su operazioni e su enti non ancora definiti.

Non possiamo coinvolgere nei calcoli il 1° membro $\frac{\frac{k}{l}}{\frac{m}{n}}$ se non è stato ancora definito. Inoltre, il Teorema sulla semplificazione di frazioni afferma che $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ purchè $a, b, m \in \mathbb{N}$ e a, b non siano frazioni.

Esempio 1.20 Per comprendere, nel caso della divisione $\frac{\frac{k}{l}}{\frac{m}{n}}$ l'algoritmo **“inverti e moltiplica”**, consideriamo in una situazione concreta la divisione tra $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{7}$.

Domanda: Un ragazzo spende ogni giorno esattamente la stessa quantità di soldi dalla sua paghetta settimanale. Se con $\frac{2}{3}$ della paghetta arriva da lunedì a venerdì, cioè sostiene i $\frac{5}{7}$ delle spese settimanali, che frazione della paghetta spende ogni settimana?

Risposta: la risposta è $f = (2/3) : (5/7)$.

La quantità x che si cerca è data dalla proporzione

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = x : 1$$

cioè

$$x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = ? \quad \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$$

Le spese per 5 giorni si coprono con $\frac{2}{3}$ della paghetta, quindi le spese per 1 giorno si coprono con

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \text{ della paghetta}$$

cioè con $\frac{2}{15}$ della paghetta. Moltiplico per 7 ed ottengo $\frac{2}{15} \times 7 = \frac{14}{15}$

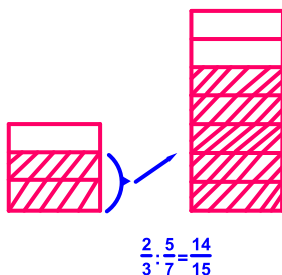


Figura 18: Divisione tra $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{7}$

La divisione tra frazioni è resa possibile dal seguente teorema:

Teorema 1.21 .

Date due frazioni $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$, con $m \neq 0$, esiste un'unica frazione C tale che:

$$\frac{k}{l} = \frac{m}{n} \times C$$

Dim. Per provare l'asserto basta scegliere $C = \frac{nk}{ml}$. Se D fosse un'altra frazione tale che:

$$(1) \quad \frac{k}{l} = \frac{m}{n} \times D$$

Moltiplicando la (1) ad ambo i membri per $\frac{n}{m}$ si ha

$$\frac{n}{m} \times \frac{k}{l} = \frac{n}{m} \times \left(\frac{m}{n} \times D \right)$$

ossia:

$$\frac{nk}{ml} = \left(\frac{n}{m} \times \frac{m}{n} \right) \times D$$

da cui

$$D = \frac{nk}{ml} = C$$

Analizziamo ora il **significato geometrico** della divisione di frazioni.

Date due frazioni A e B , con $B \neq 0$, il quoziente $\frac{A}{B}$ è la lunghezza dell'altro lato del rettangolo la cui area vale $A = \frac{A}{B} \times B$ e uno dei lati ha lunghezza B .

Nel caso della divisione tra numeri interi positivi m ed n , la divisione esatta $m : n$ viene interpretata come il *numero di gruppi* che si formano quando m oggetti vengono ripartiti in gruppi di n oggetti ciascuno.

Ad esempio, nel caso di $15 : 5$ si tratta di ripartire 15 oggetti in gruppi di 5 oggetti ciascuno:

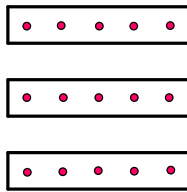


Figura 19: Ripartizione di 15 oggetti in gruppi da 5

Alla domanda “Quanti gruppi da 5 stanno in 15?” si risponde : **3**.

Consideriamo ora le due corrispondenti interpretazioni della *divisione con resto* tra due interi positivi qualsiasi $m, n \in \mathbb{N}$:

1) $m : n$ è il *massimo numero intero di gruppi* che si possono formare quando m oggetti sono ripartiti in gruppi di n oggetti ciascuno:

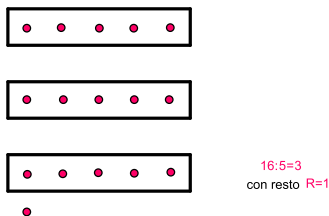


Figura 20: Ripartizione di 16 oggetti in gruppi da 5

Nel caso di $16 : 5$ ci chiediamo **Quanti gruppi da 5?** La risposta è 3, quindi abbiamo che il quoziente della divisione è 3 ed il resto è 1.

2) $m : n$ è il *massimo numero intero di oggetti* che sono in ciascun gruppo quando m oggetti sono ripartiti equamente in n gruppi

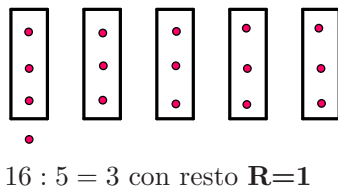


Figura 21: Ripartizione di 16 oggetti in gruppi da 5

Se adesso riprendiamo l'esempio 1.20 e consideriamo la divisione $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ nel contesto "*Quanti in un gruppo?*", corrisponderà al problema:

<< Quanti oggetti ci saranno in un gruppo se distribuisco $\frac{2}{3}$ di oggetto equamente fra $\frac{5}{7}$ di un gruppo? >>

Si cerca di determinare la frazione di un oggetto in un gruppo sapendo che i $\frac{2}{3}$ di un oggetto riempiono i $\frac{5}{7}$ di un gruppo.

Nell'esempio della paghetta, supposto che un ragazzo abbia sempre la stessa spesa giornaliera, se con $\frac{2}{3}$ di paga settimanale egli copre $\frac{5}{7}$ di spese settimanali, con quale frazione della paga ne copre i $\frac{7}{7}$, cioè copre l'intera spesa settimanale?

Dall'ipotesi segue che le spese per $\frac{1}{7}$ di settimana (per 1 giorno) si coprono con $\frac{1}{5}$ di $\frac{2}{3}$ di paga cioè con $\frac{2}{15}$, moltiplicando per 7 giorni si ottiene $\frac{14}{15}$.

Dunque con i $\frac{14}{15}$ della paga il ragazzo copre le sue spese settimanali e gliene resta $\frac{1}{15}$ per mettere da parte.

Osservazioni. Una delle difficoltà che gli studenti manifestano, quando studiano le frazioni, è di accettare che “complessivamente” l'insieme dei numeri razionali, sebbene ovunque denso, non riempia un segmento. Intuitivamente sembra impossibile che in un segmento possano coesistere un insieme infinito (di cardinalità numerabile, cioè l'insieme dei suoi punti razionali) ed un altro insieme infinito disgiunto dal primo, anzi infinito di un livello maggiore (ha cardinalità maggiore del numerabile, cioè l'insieme dei suoi punti irrazionali).

Lo studio meno approfondito dei numeri irrazionali nel percorso scolastico è forse dovuto al fatto che la pratica matematica a scuola è purtroppo ridotta spesso ad apprendimento ed uso di tecniche di calcolo. E se invece provassimo finalmente a presentare la nostra disciplina come il risultato della costruzione di un grosso edificio logico? Un edificio, che si è realizzato fin qui (ed ancora si evolve) a seguito di riflessioni atte a rendere la matematica via via più adeguata a rispondere alle necessità umane. Probabilmente in tal modo meglio potremmo dare un'idea degli insiemi numerici e della loro collocazione gerarchica come sistema organico di conoscenze. I numeri irrazionali entrano in scena a seguito di sgradevoli sorprese: il lato del quadrato non è frazione della diagonale; le altezze di un triangolo equilatero non sono frazioni del lato, ecc. Dunque le frazioni non bastano a risolvere problemi geometrici ed equazioni di secondo grado. Al pari di come i numeri naturali non bastano a studiare problemi con sottrazioni, per cui si è convenuto di ampliare il campo numerico fino a introdurre i numeri negativi e lo zero e quindi i numeri interi relativi. Al pari di come i numeri interi non bastano a risolvere equazioni di primo grado, per cui si è convenuto di ampliare il campo numerico fino alle frazioni.

Dunque, un edificio che cresce, insiemi di numeri, non solo numeri singoli con

le loro identità specifiche: $\mathbb{N}$ =Insieme dei numeri naturali o interi positivi, $\mathbb{Z}$ =Insieme degli interi relativi, $\mathbb{Q}$ =Insieme dei numeri razionali, $\mathbb{R}$ =Insieme dei razionali unito a quello dei numeri irrazionali ovvero insieme dei numeri reali.

Questo ultimo insieme è in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta, anzi è del tutto isomorfo a tale retta, al punto che possiamo identificare $\mathbb{R}$ con tale retta. Qui invochiamo il supporto dell'algebra moderna con le sue nozioni di isomorfismo. Dal punto di vista della quantità dei loro elementi, gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono alla pari, cioè, come si dice con linguaggio preciso, sono "equipotenti" ovvero sono tra loro in corrispondenza biunivoca. Questo si può mostrare agli allievi di scuola secondaria con il procedimento diagonale di Cantor. Inoltre, tra due punti di una retta cade sempre un numero razionale ($\mathbb{Q}$ è denso in se).

Qui sembra opportuno segnalare il Teorema di McKay, apparso in un articolo di L. Sherzer, pubblicato sulla rivista americana *Mathematics Teacher* del 1973 ([3]), che mostra come date due frazioni positive ridotte ai minimi termini $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, la frazione ottenuta con somma dei numeratori al numeratore e somma dei denominatori al denominatore è compresa fra le due :

$$\frac{a}{b} < \frac{(a+c)}{(b+d)} < \frac{c}{d}$$

Questo teorema fornisce un metodo per calcolare date due frazioni una frazione compresa tra esse, e nella pratica è molto più agevole di quello tradizionale che ricorre alla media aritmetica:

$$\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$$

Esempio 1.22 Per determinare una frazione compresa tra $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{5}$ in genere si ricorre alla media aritmetica tra le due frazioni, ovvero si considera il punto medio del segmento di estremi $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{5}$.

Si eseguono le seguenti operazioni:

$$\frac{(\frac{1}{6} + \frac{1}{5})}{2} = \frac{11}{60}$$

e si osserva che

$$\frac{1}{6} = \frac{10}{60} < \frac{11}{60} < \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

Invece, usando il Teorema di McKay, per determinare una frazione compresa tra $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{5}$ basta eseguire la seguente operazione:

$$\frac{1+1}{6+5}$$

e osservare che

$$\frac{1}{6} = \frac{55}{330} < \frac{2}{11} = \frac{60}{330} < \frac{1}{5} = \frac{66}{330}$$

.

Da questo esempio appare chiaro che nella pratica il metodo fornito dal Teorema di McKay fornisce in modo immediato una frazione compresa tra due frazioni assegnate. La cosa sorprendente è che questo Teorema sia stato scoperto in classe, infatti McKay era uno studente di scuola superiore e Sherzer il suo insegnante di matematica.

Riferimenti bibliografici

- [1] D.C. Litchfield, D. A. Goldenheim, C. H. Dietrich, *Euclid Fibonacci Sketchpad*, The Mathematics Teacher, Vol. 90, N.1(1997), 8–12.
- [2] M. Saul, H. Bass, H. Wu, B. Jacob, W. Bishop, R. Howe, and G. Harel, *Response to the Elizabeth Green Article*, Notices of the AMS, Vol. 62, N.5(2015), 508–514.
- [3] L. Sherzer, *McKay's Theorem*, Mathematics Teacher, Vol. 66,(1973), 229–230.
- [4] H. Wu, *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*, American Mathematical Society, 2011

Il grafico della funzione quadratica: artefatto matematico per lo studio delle equazioni e disequazioni di II grado al biennio del Liceo Scientifico

Serafina Pianese*, Piera Romano**

Introduzione

In Italia, da diversi anni, c'è grande attenzione verso l'insegnamento della Matematica. Gli esiti delle prove internazionali OCSE PISA richiamano l'attenzione dei media nazionali che sottolineano i risultati negativi, sia in lettura che in matematica, degli studenti quindicenni italiani rispetto alla media europea. Gli studenti italiani, a partire dalle prime rilevazioni nel 2003, hanno spesso mostrato maggiori difficoltà nei quesiti aperti, inseriti in situazioni problematiche con riferimento alla realtà, tipologia ben frequente nelle prove PISA, considerato che il quadro di riferimento PISA per la matematica definisce la *mathematical literacy* come *an individual's capacity to formulate, employ, and interpret mathematics in a variety of contexts. It includes reasoning mathematically and using mathematical concepts, procedures, facts and tools to describe, explain and predict phenomena. It assists individuals to recognise the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens.* (OECD, 2012). Nella definizione di competenza sono fondamentali i verbi *formulate, employ e interpret* che individuano i processi che gli studenti dovrebbero mettere in atto quando risolvono problemi legati ad un contesto, e la valutazione dei test PISA viene effettuata proprio in funzione di questi tre processi. In Italia, nel settennio 2007/2013, è sostanzialmente cambiato quanto viene richiesto agli insegnanti nell'attività curricolare attraverso l'abbandono del concetto dei programmi e il passaggio alle Indicazioni Nazionali, puntando ad una progettazione per competenze che privilegi la valutazione dei processi di cui sopra e, a tal fine, ci sono state diverse azioni di formazione rivolte ai docenti di matematica in servizio finalizzate al miglioramento del processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Si ricordi in particolare il piano di formazione M@tabel, a cura del MIUR e dell'INDIRE, rivolto ai docenti di Matematica in servizio presso la Scuola Secondaria di I Grado e al biennio della Scuola secondaria di II grado, i cui materiali didattici sono attualmente raccolti in un repository pubblico, liberamente fruibile da

* Liceo Pluricomprensivo "R.Cartesio" – Giugliano (NA) – email: sara.pianese@gmail.com

** Liceo Scientifico Statale "Mons. B. Mangino", Pagani (SA) – email: peraromano@libero.it

ciascun docente all'indirizzo <http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/>. Nelle pagine che seguono ci proponiamo di illustrare un percorso didattico che trae spunto da diverse attività proposte nel progetto M@tabel, in particolare “Aree e pavimentazioni: esploriamo le funzioni quadratiche” e “Rettangoli e Fontane”, relativo allo studio delle funzioni polinomiali di II grado e alla risoluzione equazioni e disequazioni di II grado, parte integrante della programmazione per il biennio del Liceo Scientifico. Riportiamo, in merito, alcuni stralci delle Indicazioni Nazionali del 2007, in cui, tra gli obiettivi di apprendimento da raggiungere al termine del biennio del Liceo Scientifico, si fa riferimento alla *“capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali per rappresentare un problema (mediante equazioni, disequazioni o sistemi) e risolverlo”*, si richiede ai docenti di far *“acquisire il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (...) per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico”* e, a proposito della risoluzione delle equazioni e disequazioni di II grado, si legge: *“lo studio delle funzioni del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ e la rappresentazione delle rette e delle parabole nel piano cartesiano consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo e secondo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica, specificando peraltro che “lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.”*

In linea con il Quadro di riferimento dell'INVALSI per la Matematica (https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_Mat_II_ciclo.pdf), il percorso ha l'obiettivo di migliorare la competenza degli allievi in riferimento ai seguenti processi:

- conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico,...);
- conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e saper passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...);
- saper risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi).

La nostra esperienza didattica ha evidenziato diversi nodi concettuali e problematiche relative all'argomento in questione, ovvero:

- frequenti errori da parte degli studenti nella risoluzione di equazioni e disequazioni di secondo grado cosiddette *pure* ($ax^2 + c = 0$, $ax^2 + c > 0$), soprattutto nel caso in cui i coefficienti a e c sono numeri reali concordi;
- frequenti errori degli studenti nel gestire le equazioni e le disequazioni nel caso di discriminante negativo o nullo;

- utilizzo meccanico della formula risolutiva delle equazioni di II grado, anche in casi in cui non vi è la effettiva necessità.

Molteplici studi nel campo dell'educazione matematica (ad es. Arcavi, 1994, Bloedy-Vinner, 1995) hanno analizzato le conseguenze della diffusa abitudine da parte degli insegnanti a proporre l'insegnamento del calcolo algebrico come un insieme di tecniche e procedure, trascurando l'altro aspetto, forse più importante, non solo dell'algebra in particolare, ma della matematica in generale, che è l'aspetto strutturale. Diversi autori (Skemp, 1971; Sfard, 1991; Iannece & Romano, 2008), utilizzando definizioni diverse, descrivono quest'ultimo aspetto come quello che consente di cogliere le relazioni tra diversi oggetti matematici, di utilizzare il linguaggio per generalizzare proprietà osservate in casi particolari, di proporre soluzioni per risolvere problemi in situazioni interne alla matematica, ma anche esterne.

Per ovviare ad alcuni dei problemi suddetti, che possono essere ricondotti ad un approccio allo studio della matematica di tipo prevalentemente procedurale, risulta molto efficace proporre agli studenti attività di modellizzazione che richiedano l'uso del linguaggio matematico per la descrizione di una situazione e per la risoluzione di problemi. In tal modo vengono potenziate alcune delle competenze matematiche definite in (Niss, 2003), in particolare il *mathematically modelling*¹ e il *representing mathematical entities*². E' inoltre necessario coinvolgere gli allievi in attività che richiedono la trasformazione tra rappresentazioni semiotiche differenti (sia nell'attività di conversione da un registro semiotico ad un altro, sia nella funzione di trattamento di due diverse rappresentazioni in un medesimo registro), per favorire l'interazione con le strutture matematiche per loro natura astratte (Duval, 2006) e la costruzione di complessi concetti matematici attraverso un processo di risonanza cognitiva: "*Learning through understanding [...] requires, at any level, also resonance between various "dimensions" of natural thinking: perception, language, action, representation, planning, interpretation, etc.*" (Guidoni, Iannece & Tortora, 2005).

¹*Mathematically modelling* (i.e., analysing and building models),

such as:

- analysing the foundations and properties of existing models, including assessing their range and validity;
- decoding existing models, i.e., translating and interpreting model elements in terms of the reality modelled; and
- performing active modelling in a given context, i.e., structuring the field, mathematizing, working with(in) the model (including solving the problems the model gives rise to); validating the model, internally and externally; analysing and criticizing the model (in itself and vis-a'-vis possible alternatives); communicating about the model and its results; monitoring and controlling the entire modelling process.

²*Representing mathematical entities*, such as:

- understanding and utilizing (decoding, interpreting, and distinguishing between) different sorts of representations of mathematical objects, phenomena, and situations;
- understanding and utilizing the relations between different representations of the same entity, including knowing about their relative strengths and limitations; and
- choosing and switching between representations

In queste pagine illustriamo solamente alcuni punti salienti del percorso. A partire da proposte di attività di modellizzazione, la funzione quadratica viene studiata da un punto di vista tipico dell'analisi matematica, estrapolandone le principali caratteristiche e proprietà (segno, intersezioni, monotonia, concavità) dal grafico cartesiano della funzione, ottenuto, inizialmente, per punti e, successivamente, attraverso l'utilizzo di un foglio di calcolo e/o di un software di geometria dinamica (come ad esempio Excel e GeoGebra). L'uso del foglio di calcolo è particolarmente efficace per far emergere il legame tra le variabili in gioco e promuovere l'utilizzo del linguaggio simbolico, mentre un software di geometria dinamica dà la possibilità di esaminare, attraverso la funzione di trascinamento, le proprietà di un grafico al variare dei parametri. L'attività di esplorazione, resa più potente dagli strumenti tecnologici, consente di far emergere caratteristiche comuni a classi di funzioni che pertanto divengono un modello da studiare, modello matematico che potrà poi essere utilizzato per descrivere situazioni varie in contesti differenti. Nel proporre questo tipo di attività, durante le lezioni di matematica agli allievi viene richiesto di affrontare in gruppo alcune situazioni problematiche, interne o esterne alla matematica. Durante le discussioni, ciascuno è incoraggiato ad esprimere la propria opinione in merito alla soluzione del problema, *“the time is used to talk together, to compare one to another, to learn to ask questions, to another one and to oneself”* (Postman, 1973), e anche le risposte sbagliate sono occasione di riflessione e fungono da generatore di idee corrette (Mellone & Tortora, 2015).

Ciascuna delle attività proposte porta con sé numerose ed interessanti considerazioni di tipo didattico sulla base del quadro teorico qui accennato, ma l'intento di queste pagine è meramente illustrativo dell'attività didattica, pertanto tali considerazioni saranno affrontate successivamente a partire dall'analisi dei protocolli delle attività di classe. Ovviamente i contenuti disciplinari e i risultati esposti sono ben noti agli addetti ai lavori; ciò che si vuole evidenziare è la possibilità di creare un percorso didattico che non segua le tappe che storicamente hanno portato ai ben noti risultati relativi agli argomenti trattati, tappe secondo cui sono peraltro organizzati i libri di testo per la scuola secondaria, ma che piuttosto vuole essere una proposta di rivisitazione di argomenti classici, attraverso lo studio del grafico cartesiano di una funzione. Il grafico cartesiano della funzione quadratica, ottenuto mediante l'utilizzo di software diviene in tal modo artefatto matematico per promuovere negli studenti lo studio delle equazioni e disequazioni di II grado che solitamente sono trattate in maniera prevalentemente algebrica, cosicché le tecniche risolutive vengono giustificate analizzando le proprietà della funzione quadratica. Il grafico diventa *“strumento di mediazione semiotica (...) usato intenzionalmente dall'insegnante per mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico pianificato intenzionalmente”* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

1 Funzioni quadratiche del tipo $f(x) = ax^2$

Per funzione quadratica s'intende una funzione polinomiale il cui polinomio associato ha grado 2. Essa si presenta nella forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b, c numeri reali e $a \neq 0$. Introduciamo, al variare dei coefficienti a, b, c ciascuno dei casi da studiare con qualche problema/situazione problematica descrivibile con la funzione in esame e richiameremo le definizioni e le proprietà matematiche che possono emergere nella discussione in classe con gli studenti.

Problema 1 Dalle progressioni aritmetiche alle funzioni quadratiche.

Presi 4 numeri naturali consecutivi, si calcoli la differenza tra il prodotto dei valori medi e quello dei valori estremi. Si ripeta l'esercizio con differenti quaterne di numeri consecutivi alla ricerca di eventuali regolarità, e si fornisca una dimostrazione della eventuale regolarità osservata. Si ripeta l'esercizio con 4 numeri interi in progressione aritmetica di ragione k . Esprimere la eventuale regolarità osservata.

Considerazioni didattiche in merito alle potenzialità del suddetto problema sono riportate in (Mellone & Tortora, 2015). Il problema ben si presta all'esplorazione, in quanto, attraverso ripetuti tentativi, si cercano eventuali regolarità. Esso può essere utilizzato già in una classe prima per introdurre gli studenti all'utilizzo del linguaggio algebrico. Per l'obiettivo che ci siamo posti in queste pagine, però, siamo maggiormente interessati alla regolarità che emerge al variare della ragione della progressione aritmetica. La generalizzazione attraverso il linguaggio algebrico è quella di seguito descritta.

Detti a_1, a_2, a_3, a_4 i quattro termini della progressione, si ha:

$$a_2 = a_1 + k, a_3 = a_1 + 2k, a_4 = a_1 + 3k,$$

e i prodotti richiesti sono $P_1 = a_1 \cdot a_4$ e $P_2 = a_2 \cdot a_3$. Si ricava:

$$P_2 - P_1 = a_1 \cdot a_4 - a_2 \cdot a_3 = a_1(a_1 + 3k) - (a_1 + k)(a_1 + 2k) = 2k^2$$

Problema 2 Un problema di pavimentazione (adattato dall'attività M@tabel reperibile all'indirizzo web http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/aree-e-pavimentazioni-esploriamo-le-funzioni-quadratiche/).

Bisogna pavimentare alcune aule di una scuola, tutte quadrate. E' stata scelta la ditta Pavin che ha presentato un preventivo per una pavimentazione che costa 7 € al m^2 compresa la messa in opera. Quanto si spende per ogni aula, al variare della lunghezza l del lato delle aule?

Anche in questo caso il legame è esprimibile attraverso una funzione quadratica: $A(l) = 7l^2$, dove $A(l)$ rappresenta la spesa per ogni aula. L'esercizio, piuttosto

banale, nel seguito sarà opportunamente modificato al fine di studiare la funzione quadratica, al variare dei parametri.

Le situazioni proposte nei problemi 1 e 2 sono differenti l'una dall'altra, sia per il contesto, prettamente matematico nel primo caso, con riferimento a situazioni di realtà nel secondo, sia perché è diverso il dominio delle variabili con cui i problemi vengono tradotti. Infatti, se è vero che in entrambi i casi la modellizzazione matematica conduce ad una funzione quadratica del tipo $y = ax^2$ con $b = 0, c = 0$, nel primo caso si tratta di una successione, definita nell'insieme N , mentre nel secondo il dominio della funzione è l'insieme dei numeri reali. Questa fondamentale differenza è di rilevante importanza anche per far emergere la differenza tra i grafici corrispondenti alle due situazioni, mostrati nella Figura 1, ottenuti con Excel, ma che gli allievi potrebbero anche essere in grado di disegnare procedendo per punti.

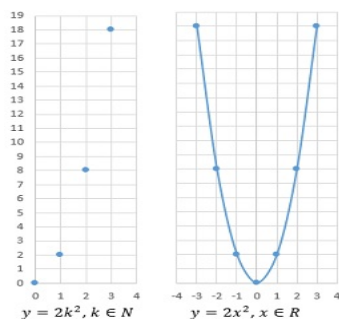


Figura 1. Funzioni di proporzionalità quadratica

Il confronto tra i due grafici è l'occasione per affrontare con gli studenti la discussione sulla possibilità di "unire" i punti, nonché sull'importanza dell'insieme di definizione della variabile indipendente. In entrambi i casi, infatti, c'è il vincolo sulla non negatività della variabile indipendente, ma la funzione di proporzionalità quadratica che traduce entrambi i problemi, generalizzabile in funzioni tipo $f(x) = ax^2$, una volta introdotta, viene studiata in quanto funzione matematica, svincolata dal contesto, pertanto le considerazioni seguenti vengono fatte con $x \in \mathbb{R}$. In ogni caso preme sottolineare ancora una volta che entrambi gli esercizi vengono proposti solo come situazioni "stimolo" per introdurre gli allievi allo studio delle funzioni quadratiche, non escludendo che ad essi se ne possono aggiungere altri, anche in contesti differenti.

Una volta posta la necessità di esaminare funzioni che esprimano relazioni di proporzionalità quadratiche tra le variabili in gioco, si rende necessaria una strategia didattica per fare in modo che allievi del biennio di scuola superiore siano in grado di esaminarne in modo qualitativo le proprietà, nonostante non posseggano gli strumenti del calcolo infinitesimale e differenziale dell'analisi matematica con cui si studiano le funzioni non elementari. E' utile rivolgere agli studenti le seguenti domande:

- Come incide il valore del parametro a sul grafico della funzione?
- Qual è il segno della funzione?
- Il grafico della funzione presenta simmetrie?
- Ci sono intersezioni con gli assi cartesiani?
- La funzione è crescente?
- Esiste un punto *speciale*? Se sì, perché? E in che senso?

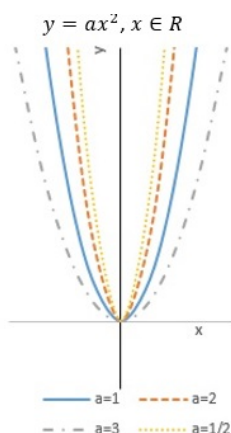


Figura 2. Funzioni di proporzionalità quadratica al variare di $a > 0$

Nel seguito descriviamo le possibili osservazioni che si possono condurre con gli studenti.

Analisi del grafico. Si richiede agli allievi di rappresentare nello stesso riferimento cartesiano diverse funzioni quadratiche, al variare del parametro $a > 0$, ad esempio $y = 2x^2$ e $y = 3x^2$, mediante l'utilizzo di un foglio di calcolo, come riportato in Figura 2. In questo modo si intuisce che, al crescere di a , la curva viene ad essere sempre più “schiacciata” verso l'asse delle ordinate; si potrà far notare agli allievi che ciò è dovuto alla rapidità con cui, al variare di a , a parità di ascissa, aumenta il valore dell'ordinata. Al variare di a , si possono anche osservare ulteriori caratteristiche: per $a > 0$ la curva rivolge la concavità verso l'alto e per $a < 0$ la curva rivolge la concavità verso il basso. In tal caso è il docente a suggerire l'utilizzo del termine concavità, tipicamente usato nello studio della parabola come luogo geometrico, tralasciando intenzionalmente di fornire precisa definizione di funzioni concave e convesse. A discrezione del docente, si può guidare la classe all'esplorazione delle differenze prime e seconde, come suggerito nei percorsi M@tabel, facendo emergere, attraverso il confronto con la rappresentazione grafica, il legame tra le differenze prime e le proprietà di monotonia della funzione e le differenze seconde, costanti, e le proprietà di convessità/concavità.

Intersezioni con gli assi. Non è difficile convincere gli studenti, guardando il grafico, che vale la seguente proprietà: $ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, in considerazione del fatto che, al

variare del parametro a , l'unico punto di intersezione della curva con gli assi coordinati è costituito dall'origine $(0,0)$.

Segno della funzione. L'osservazione dei grafici, unita alle conoscenze pregresse di teoria sul segno di una potenza pari, consente anche di rispondere alla domanda relativa al segno della funzione, che si collega direttamente alla posizione del grafico nel piano cartesiano. Ci aspettiamo che, in base al fatto che una potenza pari è sempre non negativa, si possa concludere che:

- se $a > 0$, $ax^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, dunque il grafico della curva si trova nel I e II quadrante;
- Se $a < 0$, $ax^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e dunque il grafico della curva si trova nel III e IV quadrante.

Simmetrie. E' noto che la funzione $y = ax^2$ è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate; è interessante chiedere agli allievi di provare ad dimostrare tale proprietà di simmetria. Gli allievi, assegnato un valore al parametro a , ad esempio $a = 1$, sono invitati a scegliere punti di ascisse opposte, ad esempio $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = -2, \dots$, e, a calcolarne l'immagine corrispondente. Quest'unico esempio sarà trattato come esempio generico, che apre la via alla generalizzazione valida per ciascun valore di a . Non è affatto difficile pervenire alla conclusione che, al variare di a , si ha: $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$.

È altrettanto facile riconoscere, ancora una volta come esempio generico, che per valori opposti del parametro a , ad esempio $a = 2$ e $a = -2$, le funzioni corrispondenti sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse delle ascisse. L'informazione potrà risultare molto utile nel seguito, nello studio delle disequazioni di II grado.

Si coglierà pertanto in classe l'occasione per dare le seguenti definizioni, che di solito non vengono formalizzate durante biennio.

Definizione 1.1 Una funzione reale $f(x)$, definita in un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$, è detta pari se:

- 1) $\forall x \in D, -x \in D$;
- 2) $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.

Si farà osservare che, da un punto di vista geometrico, una funzione pari è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

Definizione 1.2 La simmetria rispetto all'asse delle ascisse è una trasformazione del piano che ad un punto $P(x, y)$ fa corrispondere il punto $P'(x', y')$ in maniera tale che:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Monotonia della funzione, massimi e minimi. Dall'osservazione del grafico, si porteranno agli allievi a riflettere sul significato di crescita e decrescenza. Non è raro infatti che allievi del biennio abbiano la convinzione errata che il grafico della funzione in esame, per $a > 0$, abbia andamento crescente perché il grafico rivolge la concavità verso l'alto; tale conclusione è addirittura talvolta accompagnata da movimenti delle braccia ad indicare che i due rami di curva "salgono" verso l'alto. E' pertanto questa una buona occasione per cominciare a riflettere sulla nozione di funzione crescente. Per lo studio della monotonia, è utile, essenzialmente distinguere il caso $a > 0$ da quello $a < 0$.

Si coglie l'occasione per dare le seguenti definizioni.

Definizione 1.3 Una funzione $f(x)$ è crescente in un intervallo $]a, b[$ se e solo se, comunque scelti due valori $x_1, x_2 \in]a, b[, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definizione 1.4 Una funzione $f(x)$ è crescente in un intervallo $]a, b[$ se e solo se, comunque scelti due valori $x_1, x_2 \in]a, b[, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definizione 1.5 Assegnata una funzione $f(x)$, definita in un intervallo $[a, b]$ e un punto $x_0 \in [a, b]$, f ammette minimo assoluto in x_0 se $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in [a, b]$.

Definizione 1.6 Assegnata una funzione $f(x)$, definita in un intervallo $[a, b]$, preso un punto $x_0 \in [a, b]$, f ammette massimo assoluto in x_0 se $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in [a, b]$.

Si sottolinea che gli allievi del biennio non conoscono la parabola né come conica né come luogo geometrico, pertanto è l'insegnante a suggerire in questa fase di chiamare **parabola** il grafico della funzione $y = ax^2$ e **vertice** il suo punto estrema (minimo o massimo), in previsione di quanto successivamente gli allievi studieranno.

1.1 Equazioni di II grado del tipo: $ax^2 = c$

Introduciamo lo studio delle equazioni di II grado del tipo $ax^2 = c$ mediante il seguente problema, che fa riferimento al contesto introdotto con il problema 1.2.

Problema 2.1 Costo di una pavimentazione.

La scuola deve rinnovare la pavimentazione della palestra. Sapendo che la pavimentazione costa 7 euro al metro quadrato e che il costo complessivo è di 3500 euro, calcolare la misura del lato della palestra, sapendo che anch'essa è a pianta quadrata.

Il problema porta con sé questioni relative all'ammissibilità delle soluzioni, considerato che l'equazione risolvente $7x^2 = 3500$ ammette, nel nostro caso, come soluzioni solo valori di x positivi, questione non banale che consente di riflettere

sull'importanza di specificare il dominio per la variabile indipendente, soprattutto quando il modello matematico descrive una situazione contestualizzata.

Evidentemente lo scopo di tale quesito è quello di fare emergere la necessità di risolvere equazioni del tipo $ax^2 = c$, al variare di a e di c . Una volta introdotta la necessità di risolvere questo tipo di equazioni, è opportuno che ci si soffermi sulle strategie di risoluzione in un contesto prettamente matematico, invitando esplicitamente gli allievi a tralasciare temporaneamente il problema proposto, e rinviandone la risoluzione ad un momento successivo all'acquisizione di competenze per la risoluzione di siffatte equazioni.

E' questo il momento in cui l'insegnante può cominciare ad utilizzare il grafico cartesiano per dare significato ai vari metodi risolutivi, considerato che questo tipo di equazioni fa registrare diversi errori da parte degli studenti, in particolare quando $a \cdot c < 0$. Di solito un primo approccio alla risoluzione di questo tipo di equazione può essere quello proposto di seguito.

Interpretazione funzionale-numerica La risoluzione dell'equazione $ax^2 = c$, al variare di a e di c , è equivalente alla determinazione delle anti-immagini della funzione $y = ax^2$, in corrispondenza del valore c . Bisogna perciò individuare, se esistono, i valori della variabile x che soddisfino l'uguaglianza, in base a considerazioni che tengano conto del segno dei parametri in gioco e della possibilità di invertire l'operazione di elevamento a potenza ricorrendo, ove possibile, alla funzione radice quadrata. Ovviamente si giungerà alle ben note conclusioni, di seguito riportate:

- Se $a \cdot c > 0$, esistono due anti-immagini del valore c , rappresentate rispettivamente da $x_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}}$ e $x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$.
- Se $a \cdot c < 0$, non esistono in R anti-immagini di c , pertanto l'equazione non ammette soluzioni in R .

Alcuni semplici esempi.

- 1) $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$;
- 2) $3x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{4}{3}} \vee x = +\sqrt{\frac{4}{3}}$;
- 3) $x^2 = -4$ non ammette soluzioni reali

Tale metodo è esaustivo per la risoluzione delle equazioni, ma può generare diversi errori (si pensi al non raro caso in cui, alla richiesta di risolvere l'equazione $x^2 = -25$, si ottiene come risposta $x = \pm 5$), dovuti ad imperizia nella trattazione dei segni, ad una momentanea seppur inesorabile perdita di significato od anche all'attivazione di automatismi che precedono l'attribuzione di significato. Può essere pertanto efficace chiedere agli allievi di affrontare la risoluzione dell'equazione attraverso il confronto dei grafici, come illustrato di seguito.

Interpretazione grafica La risoluzione di un'equazione del tipo $ax^2 = c$, al variare di a e di c , diventa equivalente alla risoluzione del sistema
$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = c \end{cases}$$

che da un punto di vista geometrico è a sua volta equivalente a determinare le intersezioni tra la curva di equazione $y = ax^2$ e una retta orizzontale. Si invitano gli studenti a riflettere sui due casi possibili:

- se $a \cdot c > 0$ allora, dalla rappresentazione grafica delle due curve, si deduce che esse si intersecano in due punti di ascissa opposta;
- se $a \cdot c < 0$ allora, dalla rappresentazione grafica delle due curve, si deduce che le due curve non si intersecano, pertanto l'equazione quadratica non ammette soluzioni nel campo dei numeri reali.

Vale la pena di osservare che invece questo approccio esaustivo non è, dal momento che la determinazione delle ascisse dei punti di intersezione, laddove ci sono, va comunque fatta sfruttando l'interpretazione funzionale/numerica. Questo approccio è utile per sostenere l'allievo nella risoluzione, dal momento che si vede dal confronto dei grafici se le curve si intersecano ed in quanti punti lo fanno. Il grafico diviene uno strumento di controllo e può favorire la corretta esecuzione del compito. E' questo il momento in cui il docente agisce come mediatore, richiedendo intenzionalmente l'utilizzo di diverse rappresentazioni semiotiche, di esplorarne le potenzialità, in modo da promuovere negli allievi la competenza nell'attività di conversione tra i differenti registri. Il docente decide in questo modo di potenziare la loro competenza cognitiva di scelta rappresentazionale, non utilizzando esclusivamente nozioni di tipo algebrico; in una fase successiva lascerà che ciascuno studente affronti la risoluzione delle equazioni assecondando il proprio stile cognitivo.

Osservazione 1.1 Interpretazione grafica dell'equivalenza tra due equazioni. Si consideri l'equazione $-x^2 = -4$. E' ben noto che essa è algebricamente equivalente all'equazione $x^2 = 4$, in virtù di uno dei principi di equivalenza delle equazioni. L'utilizzo della rappresentazione grafica, per ciascuna delle due equazioni, potrebbe però generare conflitto, dal momento che i sistemi, algebricamente equivalenti, fanno riferimento a curve differenti, come mostrato in Figura 3. Vale perciò la pena far osservare che l'equivalenza delle due equazioni si esprime graficamente col fatto che le due diverse coppie di parabola-retta si intersecano in punti che hanno la stessa ascissa. Questo tipo di osservazione è di nuovo finalizzata a facilitare l'attività di conversione tra rappresentazioni semiotiche, ma vuole anche potenziare la capacità di trattamento di due rappresentazioni differenti nell'ambito dello stesso registro.

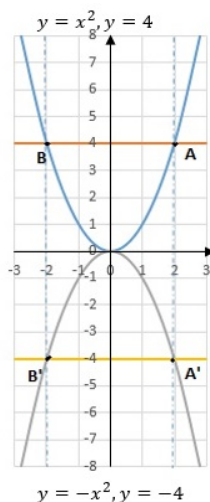


Figura 3 Le coppie di punti A e A', B e B' hanno la stessa ascissa, che corrispondono alle soluzioni delle equazioni corrispondenti

1.2 Disequazioni di II grado del tipo $ax^2 > c$ e $ax^2 < c$

La rappresentazione grafica dell'equazione $ax^2 = c$ porta naturalmente a chiedersi per quali valori della variabile x risulta $ax^2 > c$, oppure $ax^2 < c$. Bisogna, in tal caso, individuare per quali valori della variabile x il grafico della curva di equazione $y = ax^2$ si trova al di sopra o al di sotto della retta orizzontale di equazione $y = c$.

E' necessario distinguere due casi a seconda del segno di a e di c . Sia inizialmente $a > 0$. E' possibile riflettere sui seguenti casi:

- se $c > 0$, una volta individuati i due punti di intersezione

$$x_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}} \text{ e } x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}, \text{ si può dedurre che}$$

$$ax^2 > c \Leftrightarrow x < -\sqrt{\frac{c}{a}} \vee x > \sqrt{\frac{c}{a}} \text{ e } ax^2 < c \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{c}{a}} < x < \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

- Se $c < 0$, tenuto conto che dal confronto della mutua posizione dei grafici si evince che le due curve non hanno punti di intersezione, si può concludere che:

$$ax^2 > c, \forall x \in R \text{ ed invece } ax^2 < c \text{ non ammette soluzioni reali.}$$

Alcuni semplici esempi:

1. $x^2 > 4 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$;
2. $3x^2 < 4 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{4}{3}} < x < +\sqrt{\frac{4}{3}}$;

3. $x^2 < -4$ non ammette soluzioni reali.

In maniera del tutto analoga si potrà procedere per il caso $a < 0$.

Osservazione 1.2 Simmetria e insieme delle soluzioni L'utilizzo della rappresentazione grafica per la risoluzione delle disequazioni (che può e deve richiedere tempi piuttosto lunghi di esercitazioni, discussioni, approfondimenti) e il continuo riferimento alle proprietà di simmetria della parabola favorisce negli studenti la consapevolezza che l'insieme delle soluzioni delle equazioni e delle disequazioni, in assenza di vincoli legati alla natura delle variabili in gioco come nel caso del problema della pavimentazione, sono anch'essi simmetrici rispetto allo 0. Ciò può divenire strumento di controllo per evitare errori tipici e automatismi tipo $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ oppure, ancora peggio, $x^2 > 4 \Rightarrow x > \mp 2$.

Si può anche proporre una variazione al Problema 2.1, chiedendo per quali valori di x la spesa complessiva supera i 3500 euro, sempre sottolineando il vincolo che risulti $x > 0$ e facendo notare che è solo in virtù della limitazione sulla variabile x che si deroga alla simmetria dell'insieme delle soluzioni.

2 Funzioni quadratiche del tipo $f(x) = ax^2 + c$

Sia $f(x) = ax^2 + c$, una funzione quadratica con $b = 0, c \neq 0$. Ancora una volta potrebbe risultare motivante introdurre lo studio di questa funzione attraverso una leggera modifica al Problema 2, così come suggerito nel percorso M@tabel già citato.

Problema 2.2. *La ditta Pavin, che aveva vinto l'appalto per la pavimentazione delle aule, comunica che c'è anche da pagare una spesa fissa per trasporto che ammonta a 50 €. Come si modifica la funzione che esprime la spesa complessiva?*

Evidentemente la funzione che esprime la spesa complessiva è $f(x) = 7x^2 + 50$, con x che indica la lunghezza del lato di un'aula. Dopo aver risposto alla domanda, specificando che il problema richiede che la variabile x risulti positiva, l'insegnante concentrerà l'attenzione della classe sul grafico della funzione $f(x) = 7x^2 + 50$, con $x \in R$. In primo luogo, si chiede ai ragazzi di rappresentarne il grafico sullo stesso piano cartesiano della funzione $y = 7x^2$. Ovviamente si potrà poi richiedere di generalizzare le osservazioni per tutte le coppie di funzioni del tipo $y = ax^2$ e $y = ax^2 + c$.

Come suggerito nel percorso M@tabel "Aree e pavimentazioni", si può utilizzare un'applet costruita con GeoGebra per esaminare la posizione del grafico al variare di c , assumendo inizialmente, per fissare le idee, che sia $a > 0$. Più semplicemente si può richiedere di disegnare il grafico per diversi valori dei parametri a e c . In entrambi i casi si potrà osservare che:

- la funzione $y = ax^2 + c$ gode, al variare di c , delle stesse proprietà di simmetria, crescita e decrescita della funzione $y = ax^2$;
- la funzione $y = ax^2 + c$ ha come estremo il punto $V(0, c)$, che risulta poi punto di massimo se $a < 0$ e punto di minimo se $a > 0$.

Si coglierà a questo punto l'occasione per studiare la traslazione in termini di trasformazione geometrica. Si riportano per comodità alcune definizioni utili da riprendere in aula.

Definizione 2.1 La traslazione di vettore $\mathbf{v}$ è una trasformazione geometrica tra i punti del piano che ad un punto P fa corrispondere il punto P' in modo che il vettore PP' sia equipollente al vettore $\mathbf{v}$.

In un sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale, un vettore può essere descritto attraverso le sue componenti e una trasformazione geometrica è una applicazione biiettiva del piano in sé. Pertanto si può dare la seguente definizione.

Definizione 2.2 Assegnato un vettore $\mathbf{v} = (a, b) \in R^2$, la traslazione di vettore $\mathbf{v}$ è l'applicazione $T: R^2 \rightarrow R^2$ che ad un punto $P(x, y)$ fa corrispondere il punto $P'(x', y')$ in maniera tale che: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

Tornando alla funzione $f(x) = ax^2 + c$, il suo grafico si può ritenere ottenuto da quello della funzione $f(x) = ax^2$ per effetto di una traslazione di vettore $(0, c)$. In base a questa considerazione, è molto efficace focalizzare l'attenzione degli studenti sul ruolo del parametro c , in maniera da educare a guardare ai parametri in maniera significativa.

2.1 Equazioni di II grado del tipo $ax^2 + c = 0$

Diventa a questo punto interessante richiedere agli studenti di risolvere l'equazione $ax^2 + c = 0$, nell'ambito dello studio della funzione $f(x) = ax^2 + c$.

Come nel paragrafo precedente, tale equazione può essere affrontata ed interpretata in diversi modi, ma è molto interessante, alla luce della mediazione semiotica che il docente può opportunamente condurre, indirizzare intenzionalmente gli studenti ad usare il grafico per le considerazioni che seguono.

Interpretazione grafica La risoluzione di un'equazione del tipo $ax^2 + c = 0$, al variare di a e di c , da un punto di vista geometrico, è equivalente a determinare le intersezioni del grafico della funzione $y = ax^2 + c$ con l'asse delle ascisse, ed è equivalente alla risoluzione del sistema $\begin{cases} y = ax^2 + c \\ y = 0 \end{cases}$

Gli studenti di una classe seconda potrebbero essere già a conoscenza del legame tra i tre concetti: zeri di una funzione, risoluzione delle equazioni, intersezioni di una curva con gli assi, ma è bene nuovamente richiamare la seguente definizione.

Definizione 2.3. Assegnata una funzione $y = f(x)$, definita in $D \subseteq R$ si chiama zero della funzione un valore $x_0 \in D$: $f(x_0) = 0$.

Da tale definizione immediatamente segue che uno zero della funzione corrisponde sul grafico cartesiano al punto di coordinate $(x_0, 0)$ e che gli zeri di una funzione sono le soluzioni dell'equazione non lineare $f(x) = 0$.

Facilmente si otterrà la seguente classificazione:

- se $a \cdot c > 0$, la funzione quadratica rappresenta parabole di equazione $y = ax^2 + c$ che non intersecano l'asse delle ascisse;
- se $a \cdot c < 0$, tali parabole di equazione $y = ax^2 + c$ intersecano l'asse delle ascisse in due punti di ascisse opposte.

Questo tipo di interpretazione, come nel caso precedente, non è esauriente, dal momento che dal solo esame del grafico cartesiano non è in generale possibile ricavare l'ascissa dei punti di intersezione, se non in casi particolari. Occorre nuovamente abbinare all'interpretazione grafica tecniche risolutive di altra natura. Ma stavolta, piuttosto che un'interpretazione funzionale/numerica, che richiederebbe la **determinazione** delle anti-immagini di 0 per $f(x) = ax^2 + c$, è molto più efficace ai fini della risoluzione ricorrere agli strumenti del calcolo algebrico ricorrendo al seguente ben noto teorema di algebra.

Teorema 2.1 Se un polinomio $P(x)$ di grado n a coefficienti reali ammette m zeri reali $c_1, c_2, \dots, c_m$, con $m \leq n$, se e solo se il polinomio è multiplo di $(x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \dots \cdot (x - c_m)$.

Interpretazione algebrica La risoluzione di un'equazione quadratica del tipo $ax^2 + c = 0$, al variare di a e di c , è facilitata dalle conoscenze degli studenti in merito alla fattorizzazione del binomio $ax^2 + c$.

Facilmente si ottiene la seguente classificazione:

- se $a \cdot c > 0$, il binomio $ax^2 + c$ è irriducibile, pertanto l'equazione $ax^2 + c = 0$ non ammette soluzioni;
- se $a \cdot c < 0$, il binomio $ax^2 + c$ si presenta come differenza di due quadrati, pertanto l'equazione $ax^2 + c = 0$ ammette 2 soluzioni reali e distinte.

Posto $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ e $x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$, si ha: $ax^2 + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$,

da cui, applicando la legge di annullamento del prodotto, si ricava che x_1 e x_2 sono le due soluzioni.

Esempi:

1. $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$
2. $3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}x - 2)(\sqrt{3}x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \vee x = \frac{2}{\sqrt{3}}$
3. $x^2 + 4 = 0$ non ammette soluzioni reali

Osservazione 2.1 Interpretazione grafica di equazioni equivalenti. Algebricamente le equazioni quadratiche $ax^2 + c = 0$ e $ax^2 = -c$ sono equivalenti: esse infatti si ottengono l'una dall'altra per semplice applicazione del primo principio di equivalenza delle equazioni. Esse però hanno una differente interpretazione grafica, come abbiamo precedentemente descritto. Ancora un volta è molto interessante stimolare la riflessione sul significato di equazioni equivalenti nel registro di rappresentazione grafica, in modo da rendere gli studenti maggiormente capaci di operare trasformazioni nello stesso registro e tra registri semiotici, in modo da poter, successivamente, scegliere con consapevolezza, a seconda dei contesti e degli obiettivi, la rappresentazione più efficace.

Nella figura 4 sono rappresentati i sistemi equivalenti alle equazioni $x^2 - 4 = 0$ e $x^2 = 4$, attraverso le funzioni $y = x^2$, $y = 4$ e $y = x^2 - 4$.

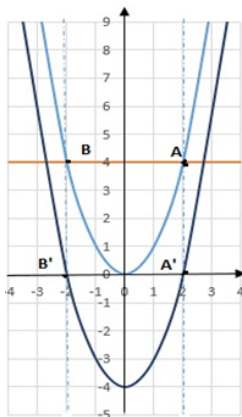


Figura 4 Le coppie di punti A, A' e B, B' hanno le stesse ascisse, che corrispondono alle soluzioni delle due corrispondenti equazioni

2.2 Disequazioni del tipo $ax^2 + c > 0$ e $ax^2 + c < 0$

Evidentemente disequazioni del tipo $ax^2 + c > 0$ e $ax^2 + c < 0$ sono equivalenti a quelle studiate nel paragrafo 1.2, ma vale la pena sottolineare come in questo caso la

formulazione della disequazione può essere ricondotta allo studio del segno della funzione $f(x) = ax^2 + c$, al variare di a e di c . Come è stato già specificato in precedenza l'analisi del grafico cartesiano della famiglia avviene attraverso l'utilizzo di un software di geometria dinamica che consente la variazione dei parametri a e c , cosicché risulta possibile dedurre qualitativamente le caratteristiche della famiglia di funzioni in esame. In questa fase è ancora maggiormente determinante il ruolo dell'insegnante che ha, oramai, a disposizione più di uno strumento di mediazione. In maniera opportuna il docente dovrà dosare tra gli aspetti algebrici e grafici, utilizzando ora gli uni ora gli altri a sostegno reciproco. Gli studenti hanno la possibilità di risolvere tali disequazioni sulla base di considerazioni di natura algebrica, ma anche in questo caso l'interpretazione grafica rende maggiormente efficace l'azione didattica, anche perché come vedremo a breve, si rende possibile la costruzione di un modello riutilizzabile per lo studio delle funzioni quadratiche del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $b \neq 0$.

Nel caso $a \cdot c < 0$ sono note le soluzioni $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ e $x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$, dell'equazione associata e, mediante la fattorizzazione del binomio, la disequazione può essere affrontata algebricamente lo studio del segno dei due fattori della scomposizione; Graficamente, lo studio del segno della funzione $f(x) = ax^2 + c$ è reso possibile in base alle proprietà della funzione e all'analisi di grafici generici, assunti a modello, come in figura 5, in cui si è assunto $a > 0$, dal momento che nei paragrafi precedenti è stato stabilito che, al variare di a e c , funzione $f(x) = ax^2 + c$ interseca l'asse orizzontale in due punti di ascissa $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ e $x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

In entrambe le interpretazioni si può arrivare alle ben note seguenti conclusioni:

- se $a > 0$, $ax^2 + c > 0 \Leftrightarrow x < x_1 \vee x > x_2$ e $ax^2 + c < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
- se $a < 0$, $ax^2 + c > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$ e $ax^2 + c < 0 \Leftrightarrow x < x_1 \vee x > x_2$

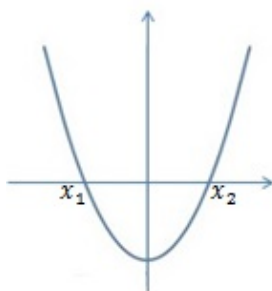


Figura 5 Rappresentazione grafica della funzione $f(x) = ax^2 + c$, $a > 0$, $c < 0$

Invece se $a \cdot c > 0$, la trattazione algebrica della disequazione richiederebbe da parte degli studenti uno spiccato *symbol sense*, nel senso di (Arcavi,1994), che consentirebbe loro di riconoscere che il binomio ha segno costante. Anche in questo caso il modello di rappresentazione grafica della funzione $f(x) = ax^2 + c$, in figura 6 rappresentato nel caso in cui $a > 0$, può essere di grande aiuto per concludere che, essendo il grafico privo di intersezioni con l'asse delle ascisse, la funzione mantiene costante il suo segno, ovvero

- se $a > 0, ax^2 + c > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e $\nexists x \in \mathbb{R}: ax^2 + c < 0$
- se $a < 0, ax^2 + c < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e $\nexists x \in \mathbb{R}: ax^2 + c > 0$

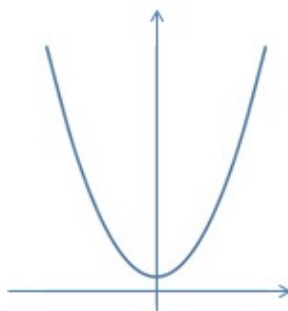


Figura 6 Rappresentazione grafica della funzione $f(x) = ax^2 + c, a > 0, c > 0$

3 Funzioni quadratiche del tipo $f(x) = ax^2 + bx$

Sia $f(x) = ax^2 + bx$, funzione quadratica con $b \neq 0, c = 0$. Di nuovo può risultare motivante introdurre lo studio di questa funzione attraverso una leggera modifica al problema 2.1, così come suggerito nel percorso M@tabel già citato.

Problema 3.1. Alla ditta Pavin viene chiesto di completare la pavimentazione delle singole aule con un battiscopa, il cui costo è di 5 euro al m. Come si modifica la funzione che esprime la spesa complessiva per ciascuna aula, al variare della misura del lato dell'aula?

Evidentemente la funzione che esprime la spesa complessiva è $f(x) = 7x^2 + 20x$, con x che indica la lunghezza del lato delle aule, con il vincolo $x > 0$. La rappresentazione grafica della funzione $f(x) = 7x^2 + 20x$, ottenuta con un software di geometria dinamica, dapprima con $x > 0$, e poi, tralasciando nuovamente il problema che ha consentito l'introduzione di tale funzione, con $x \in \mathbb{R}$, mostra che l'andamento della funzione è qualitativamente identico a quello di $f(x) = 7x^2$, se non per l'evidente cambiamento dell'asse di simmetria.

Per convincere gli studenti che il grafico di una funzione del tipo $f(x) = ax^2 + bx$ ha lo stesso andamento del grafico della funzione $f(x) = ax^2$, si farà loro scrivere l'equazione della trasformazione che consente di passare dal grafico di $f(x) = ax^2$, parabola con vertice nell'origine O degli assi, a quello di $f(x) = ax^2 + bx$, parabola di vertice V è una traslazione di vettore $\overrightarrow{OV}$. si rende perciò necessario individuare le coordinate del vertice V della parabola, pertanto è utile sottoporre agli studenti i seguenti quesiti:

- C'è un punto fisso per tutte le parabole, al variare di a e b ?
- Sei in grado di determinare l'ascissa dei punti di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse al variare di a e b ?
- Dove si trova il vertice della parabola, al variare di a e b ?
- Sei in grado di determinare l'ascissa del vertice, al variare di a e b ?

Ci si aspetta che gli studenti, attraverso l'esplorazione dei grafici effettuata con GeoGebra, software di geometria dinamica, si accorgano che ciascuna curva passa per l'origine degli assi e che, in virtù delle proprietà di simmetria, per individuare l'equazione dell'asse, occorre trovare i due punti di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse. È pertanto qui di fondamentale importanza risolvere algebricamente l'equazione $ax^2 + bx = 0$, mediante la fattorizzazione del binomio e l'applicazione della legge di annullamento del prodotto, che gli studenti già conoscono al secondo anno di liceo scientifico:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

Le soluzioni $x = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$ sono da interpretare poi come ascisse dei punti di intersezione con l'asse x , $A(0,0)$ e $B\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. In risonanza con quanto osservato per le funzioni $f(x) = ax^2$ e $f(x) = ax^2 + c$, ci si aspetta che gli studenti individuino l'asse di simmetria passante per il punto medio M del segmento AB (e dunque per il punto $M\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$), nella retta verticale di equazione $x = -\frac{b}{2a}$. A questo punto, calcolando $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ si ricavano le coordinate del vertice V della parabola: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$, da cui segue che il vettore $\overrightarrow{OV}$ ha componenti $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$.

In base alla definizione 2.1, si individua la traslazione di vettore $\overrightarrow{OV}$ che consente di

$$\text{ottenere } f(x) = ax^2 + bx \text{ a partire da } f(x) = ax^2: \begin{cases} x' = x - \frac{b}{2a} \\ y' = y - \frac{b^2}{4a} \end{cases}$$

Chiaramente non aggiungeremo altro relativamente alla risoluzione delle equazioni di II grado del tipo $ax^2 + bx = 0$.

3.1 Disequazioni di II grado $ax^2 + bx > 0$, $ax^2 + bx < 0$

Per la risoluzione di disequazioni di questo tipo, gli studenti potranno attivare sia competenze di natura algebrica, in merito al confronto dei segni dei fattori della scomposizione del binomio $ax^2 + bx$, sia competenza di analisi del segno a partire dal grafico cartesiano delle funzioni del tipo $f(x) = ax^2 + bx$, come descritto nel paragrafo 2.2, opportunamente determinando i valori delle soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$ e giungere alle stesse conclusioni descritte nel paragrafo 2.2, variando opportunamente il valore delle radici x_1 e x_2 .

4 Funzioni del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$

Infine sia $f(x) = ax^2 + bx + c$, funzione quadratica con $b \neq 0, c \neq 0$. Essa può essere introdotta con un'ulteriore modifica al problema 3.1.

Problema 4.1. *Esprimi la spesa complessiva per la pavimentazione di una singola aula, comprensiva di battiscopa e delle spese di trasporto, in funzione della misura x del lato dell'aula.*

Evidentemente, la funzione che esprime la spesa complessiva è $f(x) = 7x^2 + 20x + 30$. Come nel paragrafo 3, dall'esame del grafico di tale funzione, confrontato questa volta con quello della funzione $f(x) = 7x^2 + 20x$, si intuisce che si passa dall'uno all'altro con una traslazione di vettore $(0,30)$. Si generalizzerà il risultato, dopo averlo verificato attraverso l'utilizzo di GeoGebra variando i parametri, per concludere che il grafico di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$, tenendo fissi i parametri a e b si ottiene dal grafico di $f(x) = ax^2 + bx$ con una traslazione di vettore $(0, c)$. Ciò comporta che la funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ gode delle stesse proprietà di simmetria della funzione di cui è la traslata, pertanto l'asse di simmetria è ancora la retta di equazione $x = -\frac{b}{2a}$. A questo punto, calcolando $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ si ricavano le coordinate del vertice V della parabola: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, avendo posto $\Delta = b^2 - 4ac$.

Assumendo inizialmente $a > 0$, cosicché al variare dei parametri a, b e c la parabola rivolge la concavità verso l'alto, e focalizzando l'attenzione sul vertice della parabola, dall'analisi qualitativa del grafico (si farà riferimento a grafici modello come in figura 7) e si guidano gli studenti alle seguenti conclusioni:

- se $\Delta < 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ha il vertice nel semipiano positivo delle ordinate e rivolge la concavità verso l'alto se $a > 0$, nel semipiano negativo con la concavità verso il basso se $a < 0$, pertanto il grafico non ha punti di intersezione con l'asse delle ascisse e il suo segno è costante;

- se $\Delta = 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ha il vertice sull'asse delle ascisse, il grafico ha un unico punto di intersezione con l'asse delle ascisse, che coincide con il vertice, e altrove ha segno costante;
- se $\Delta > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ha il vertice nel semipiano negativo delle ordinate e rivolge la concavità verso l'alto se $a > 0$, nel semipiano positivo con la concavità verso il basso se $a < 0$, pertanto il suo grafico ha due punti di intersezione con l'asse delle ascisse (sarà cura del docente stabilire, in base al livello medio della classe, l'opportunità o meno di far riferimento, qualitativamente, al concetto di continuità di una funzione e al teorema degli zeri), e il suo segno è variabile.

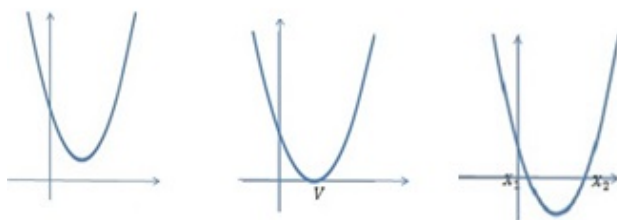


Figura 7 Rappresentazione grafica della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, al variare del Δ

A seguito di tale classificazione, solo nel caso in cui $\Delta > 0$ si rende necessaria la determinazione delle ascisse dei punti di intersezione, che gli allievi sono già in grado di determinare, in base al teorema 2.1, solo nei casi in cui la funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ ammette zeri razionali. E' questo il momento in cui può, significativamente, essere proposta la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, notoriamente ottenuta come illustrato di seguito.

Osservato che

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right],$$

si ha:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2},$$

da cui si ottiene $x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ oppure $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$

Pertanto, le soluzioni dell'equazione sono, come si ritrova sulla maggior parte dei libri di testo in adozione nella scuola secondaria di II grado, sono:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si farà osservare agli studenti che le conclusioni ottenute attraverso l'analisi qualitativa dei grafici sono compatibili con le soluzioni così determinate, in

considerazione delle condizioni di realtà delle radici quadrate. In effetti la cosiddetta formula risolutiva delle equazioni di II grado, che viene scritta nella forma:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ non solo è strettamente necessaria solo nel caso in cui $\Delta \geq 0$, ma addirittura ha senso solo in questo caso.

Lo studio del segno della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ può a questo punto essere richiesto facendo leva sulle competenze degli allievi, algebriche e/o grafiche, acquisite durante lo svolgimento delle attività descritte nei paragrafi precedenti, e si conclude che:

- se $a > 0$ e $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x < x_1 \vee x > x_2$ e
 $ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
- se $a > 0$ e $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \forall x: x \neq -\frac{b}{2a}$ e
 $\nexists x \in R: ax^2 + bx + c < 0$
- se $a > 0$ e $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$ e
 $\nexists x \in R: ax^2 + bx + c < 0$

In maniera del tutto analoga si affronterà il caso $a < 0$.

5 Conclusioni

Abbiamo illustrato un percorso didattico progettato per la seconda classe del Liceo Scientifico, che trae spunto da due attività inserite nel progetto M@tabel, in particolare “Aree e pavimentazioni: esploriamo le funzioni quadratiche” e “Rettangoli e Fontane”, relativo allo studio delle funzioni polinomiali di II grado e alla risoluzione equazioni e disequazioni di II grado, parte integrante della programmazione per il biennio del Liceo Scientifico. Tale percorso è stato sperimentato con diverse classi e interessanti sono le considerazioni possibili in merito alle risposte ricevute dagli studenti, della cui analisi in questo contributo non ci siamo occupati. Il grafico della funzione quadratica è divenuto artefatto, utilizzato intenzionalmente da parte del docente per veicolare nuovi contenuti curricolari, attraverso attività di esplorazione, argomentazione e dimostrazione dei risultati ottenuti, anche con l’ausilio di strumenti digitali che consentono di creare modelli matematici validi. La proposta didattica qui presentata potrebbe essere reinterpretata anche per altri tipi di funzioni elementari, con le opportune e necessarie modifiche.

Bibliografia e sitografia

- Per le attività M@tabel proposte:
http://risorsedocentipon.indire.it/offerta_formativa/f/index.php?action=copertina_percorso&lms_id=236;
- AAVV, Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica. Ciclo secondario.

<http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html>

- Quadro di riferimento dell'INVALSI:
http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/QDR/QdR_Matematica.pdf
- OECD, 2012: www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20framework%20e-book_final.pdf
- Per le Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico:
http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/Liceo%20scientifico.pdf
- Arcavi, A.(1994), *Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics*. For the learning of Mathematics, 14, 3, 24-3
- Bloedy-Vinner, H.(1995), *Algebraic Interpretation of Algebraic Expression: Function or Predicates?* Proc. of PME XIX , Recife, 2-42.
- Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A. (2009). *Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij*, in L'insegnamento della Mat. e delle Sci. Integrate, vol. 32 A-B, pp. 270-294.
- Duval, R. (2006). Trasformazione di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. La matematica e la sua didattica, 20(49), 585-629.
- Guidoni, P., Iannece, D., Tortora, R. (2005), *Forming Teachers as Resonance Mediator*, Proc. of PME XXIX, Melbourne, 3, 73-80.
- Iannece, D., & Romano, P. (2008). *What does it mean to have a "scientific approach" for a teacher? A reflection*. In M. Kourkoulos & C. Tzanaki (Eds.), Proc. of 5th intern. Coll. on the didactics of math, (pp. 409-420). University of Crete.
- Mellone, M., Tortora, R. (2015) *Ambiguity as a cognitive and didactic resource*. Konrad Krainer; Nada Vondrov'a. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.1434-1439, Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. <hal-01287686>
- Niss, M. (2003). *Quantitative Literacy and Mathematical Competencies.* "Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges. B. Madison & L. Steen(eds.). Princeton: National Council on Education and the Disciplines. 215-220.
- Postman, N.; Weingartner, C. (1973), *Teaching as a Subversive Activity*. Delta, New York.
- Sfard, A.: 1991, *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on*

- Skemp, R. R.: 1971, *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books, Harmondsworth, England.

Dalla mela di Newton alle onde gravitazionali: uno sguardo sulla Scienza Moderna dalla nascita a tutt'oggi

Salvatore Rionero*

1 Introduzione

La nascita della Scienza Moderna risale al sorgere della Rivoluzione Scientifica, il cui inizio si può collocare intorno al 1543, anno della stampa a Norinberga del "De revolutionibus orbium coelestium" di N. Copernico ed il cui completamento si può fissare intorno al 1687, anno della stampa a Londra del "Philosophiae naturalis Principia mathematica" di I. Newton. Nei Principia Newton formula le leggi della Dinamica tutt'ora applicate nella descrizione dei fenomeni in cui non entrano in gioco velocità confrontabili con quella della luce (Meccanica Classica o Newtoniana) e della cui validità ne facciamo continua quotidiana esperienza. In particolare la messa in orbita di satelliti artificiali, il viaggio dell'uomo sulla Luna, l'esplorazione di Marte, sono tutti successi della Meccanica Classica. Con la Rivoluzione Scientifica inizia un modo nuovo di fare Scienza. Al posto delle disquisizioni puramente teoriche - alla luce e nel rispetto dei maestri classici (Aristotele) e degli Scolastici medievali - la sperimentazione iniziò ad avere un ruolo fondamentale nella costruzione e nello sviluppo delle teorie scientifiche. La Rivoluzione Scientifica mette in dubbio la Scienza precedente, subordinando la validità degli sviluppi teorici alla loro concordanza con i dati sperimentali: il nuovo scienziato deve controllare, e più volte, le affermazioni teoriche dei maestri attraverso la sperimentazione e la misurazione ("*Provando e riprovando*" G. Galilei). In più emerge la necessità di esprimere i risultati scientifici attraverso formule matematiche, le sole che consentono una scrittura formale e rigorosa delle leggi che reggono un fenomeno naturale ("*la natura é scritta in termini matematici*" G. Galilei).

Numerosi scienziati, in vario modo, hanno contribuito alla Rivoluzione Scientifica. Ma i suoi pilastri sono *Niccolo Copernico*, *Galileo Galilei*, *Giovanni Keplero*. Isacco Newton nei "Principia" completò le ricerche sulla

*Università degli Studi di Napoli "Federico II". Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli". Via Cinzia, Napoli. Email: rionero@unina.it. Accademia Nazionale dei Lincei. Via della Lungara 10, Roma. rionero@soci-anl.it

dinamica dei suoi predecessori enunciando in modo completo e definitivo il modello matematico ipotetico - deduttivo della Dinamica. Egli era ben conscio del contributo fondamentale dei suoi predecessori e in una lettera del 1676 ad Hooke scrive: "*Se ho visto piú lontano é perché stavo sulle spalle di giganti*". Nei due secoli successivi al 1687 il successo della Meccanica Classica e delle sue generalizzazioni (fluidodinamica, termodinamica, ...) ed applicazioni ingegneristiche (macchine a vapore) consentirono la cosiddetta Rivoluzione Industriale che fece fare un salto qualitativo e sociale alle popolazioni. Ad essa va associata la formalizzazione rigorosa delle leggi dell'elettromagnetismo e le loro applicazioni (le città, intorno alla fine del 1800 ed all'inizio del 1900, cominciarono ad essere elettricamente illuminate!). Con l'avvento dell'elettromagnetismo ed in particolare con l'avvento della proprietà di isotropia (nel vuoto) della propagazione delle onde elettromagnetiche e dell'invarianza della velocità della luce rispetto a riferimenti in moto (invarianza non consentita dalla legge di composizione delle velocità della Meccanica classica), apparvero le difficoltà della Meccanica classica di incamerare nel suo modello i fenomeni elettromagnetici. Per quasi due secoli i fenomeni meccanici ed i fenomeni elettromagnetici camminarono su modelli distinti ed inconciliabili. Molti scienziati, nel corso degli anni - verso la fine del 1800 ed inizio del 1900 - tentarono di formulare un modello unificante.

La difficoltà fondamentale era che in Meccanica classica é ammessa l'azione a distanza immediata (implicita sia nella legge di gravitazione Universale che nel principio di azione e reazione di Newton) mentre in elettromagnetismo le azioni si propagano con velocità finita anche se elevatissima quale é quella della luce (300.000 Km/sec).

Solo nel 1905 apparve il primo modello unificante la Meccanica classica e l'elettromagnetismo. In tale anno, uno sconosciuto giovane impiegato di 26 anni dell'ufficio brevetti di Berna, Albert Einstein, pubblicó sul giornale (tedesco) *Annali di Fisica*, il modello della cosiddetta *Relatività Ristretta o Speciale*, in cui vengono formulate le nuove leggi della dinamica. Tali leggi si riducono a quelle di Newton per velocità piccole rispetto a quella della luce, e non sono in contraddizione con l'elettromagnetismo. L'aggettivo *ristretta o speciale*, si riferisce al fatto che la teoria prende in esame solo riferimenti che si muovono di moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro. Va detto che il modello della Relatività Ristretta non ammette azioni a distanza immediata e la velocità della luce é un limite invalicabile per ogni trasmissione di informazioni o azioni, legate da causa ed effetto. Ciò lascia fuori la legge di gravitazione universale!

Einstein impiegó 10 anni per inglobare anche la gravità in un unico modello e, riconosciuta l'equivalenza tra accelerazione e gravità, formuló nel 1915 le leggi della *Relatività Generale* che inglobano in un solo modello le leggi di Newton, dell'elettromagnetismo di Maxwell, della gravitazione universale, consentendo anche il moto accelerato ai riferimenti in moto traslatorio tra loro (escludendo al momento solo la meccanica quantistica).

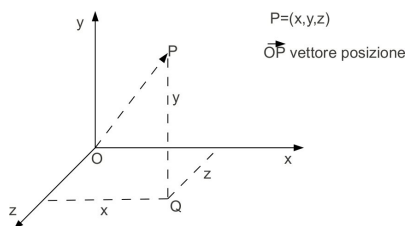


Figure 1: Riferimento dell'osservatore O

Nelle pagine che seguono ci proponiamo di illustrare brevemente, qualitativamente e con qualche dettaglio matematico, il percorso scientifico prima esposto, mettendo in evidenza le idee fondamentali ed unificanti che hanno portato alla Scienza Moderna tra cui il fondamentale *Principio di Invarianza*:

Le leggi che regolano i fenomeni devono avere forma matematica invariante dal passaggio da un riferimento ad un altro in moto traslatorio (uniforme o meno) tra loro.

La presente esposizione – rapida rassegna panoramica – é rivolta ad un pubblico non specialista ed é dedicata a giovani studenti¹.

2 Richiami e principali assiomi della Fisica Classica

Ricordiamo che

- 1) la quiete, il moto, la velocità e l'accelerazione di un punto (materiale) P *non sono grandezze assolute* ma variano al variare dell'osservatore.
- 2) Ogni osservatore O per descrivere il moto si serve di una terna di riferimento
- 3) $\underline{v}$ (velocità di P rispetto ad O): misura la rapidità con cui varia (nell'unità di tempo) la posizione di P; $\underline{a}$ (accelerazione di P rispetto ad O): misura la rapidità con cui varia (nell'unità di tempo) la velocità di P;
- 4) diconsi coordinate spazio-tempo di un evento, le coordinate (x, y, z, t) che associano alla posizione $P=(x,y,z)$ dello spazio in cui avviene l'evento, l'istante t in cui esso avviene;
- 5) in ogni riferimento vale la geometria euclidea;

¹In particolare agli allievi del Liceo "Giosué Carducci" di Nola (NA), liceo che ho frequentato nella seconda metà degli anni '40.

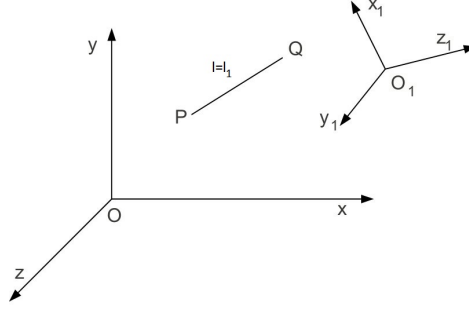


Figure 2: Invarianza della lunghezza al variare dell'osservatore

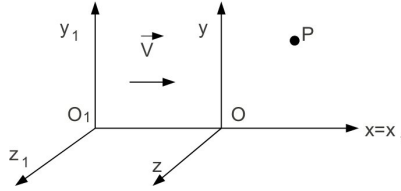


Figure 3: Riferimenti in moto traslatorio relativo uniforme

- 6) esiste un tempo unico per tutti gli osservatori qualunque sia lo stato di quiete e di moto dell'uno rispetto all'altro (*assioma del tempo assoluto*);
- 7) la distanza tra due punti P e Q , misurata da O , coincide con quella misurata da O_1 (*assioma di invarianza delle distanze*).
- 8) la legge di composizione della velocità ed accelerazione rispetto a due riferimenti in moto (di trascinamento) traslatorio uniforme dell'uno rispetto all'altro sono

$$\begin{cases} \underline{v}_a = \underline{v}_r + \underline{V}, \\ \underline{a}_a = \underline{a}_r \end{cases} \quad (2.1)$$

con $\underline{v}_a$, $\underline{a}_a$ velocità ed accelerazione rispetto ad O_1 e $\underline{v}_r$ e $\underline{a}_r$ velocità e accelerazione rispetto ad O , $\underline{V}$ velocità di O rispetto a O_1 ;

- 9) la trasformazione (di Galilei)

$$\begin{cases} x_1 = x + vt, \\ y_1 = y, \\ z_1 = z, \\ t_1 = t \end{cases} \quad (2.2)$$

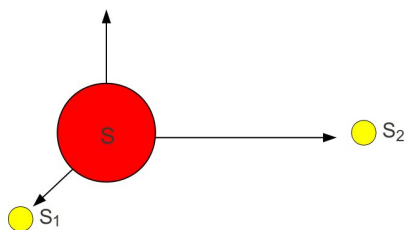


Figure 4: Riferimento solare (inerziale)

lega le coordinate spazio-temporali (x_1, y_1, z_1, t_1) e (x, y, z, t) di uno stesso evento rispetto a due osservatori O ed O_1 in moto traslatorio uniforme dell'uno rispetto all'altro.

3 Niccoló Copernico (1473-1543): eliocentrismo

Il grande merito di Copernico è di aver riconosciuto che per gli osservatori della Terra, *nello studio della dinamica del sistema solare conviene prendere come riferimento un riferimento ortogonale con origine nel Sole e due degli assi diretti verso due stelle fisse (detto riferimento inerziale)*. Ovviamente non ha senso porsi il problema: è il Sole che gira intorno alla Terra o è la Terra che gira intorno al Sole? Per un osservatore terrestre, la Terra è ferma ed il Sole vi gira intorno mentre l'inverso avviene per un osservatore fisso sul Sole. L'eliocentrismo riconosce che per gli osservatori terrestri conviene riferire il moto ad un riferimento con l'origine nel Sole giacché si hanno così leggi più semplici e non complicate come quelle che si ottengono scegliendo come terna di riferimento la Terra. La scelta dell'eliocentrismo – che tanto è stata discussa e che ha causato processi (G.Galilei) e morte (G.Bruno) solo per motivi religiosi – non è altro che una scelta di convenienza per la descrizione più semplice possibile del moto dei corpi del Sistema Solare.

4 Giovanni Keplero (1571-1630) e le sue leggi

Per descrivere il movimento planetario, Keplero enunciò tre leggi empiriche. Le prime due furono presentate nel 1609, mentre l'ultima fu pubblicata nel 1618

- *Prima legge: l'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi (fig. 5);*
- *Seconda legge: il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali (fig. 5);*
- *Terza legge: i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite. In forma*

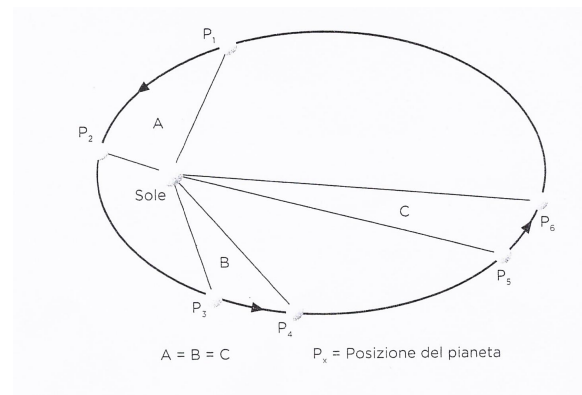


Figure 5: Prima e Seconda Legge di keplero

algebraica si ottiene che se la distanza media è r e il periodo orbitale è T , si ha $\frac{T^2}{r^3} = \text{costante}$.

5 Galileo Galilei (1564-1642): metodo scientifico

Galilei è il primo scienziato in senso moderno. Ecco il riconoscimento di A. Einstein *“Tutto ciò che conosciamo della realtà inizia e finisce con l’esperienza. Dato che fu Galilei a rendersene conto, è lui il padre della fisica moderna, a dire il vero, lo è di tutta la scienza moderna”*

Galilei propugnava un nuovo concetto di scienza basata su sperimentazione e razionalismo matematico (l’Universo è scritto in lingua matematica). É stato il primo a rivolgere il cannocchiale verso il cielo. Sua é la scoperta dei satelliti di Giove. Sostenitore dell’eliocentrismo subí un processo religioso che lo costrinse a far marcia indietro. É suo il Principio di Relatività della Meccanica Classica: *Non esiste alcun fenomeno meccanico capace di mettere in evidenza il moto traslatorio uniforme di un riferimento rispetto ad un altro*. Il Principio di relatività è enunciato nel “Dialogo sopra i massimi sistemi del mondo” (1632). Egli fa dire a Salviati (che rappresenta l’opinione di Galilei)

“Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto copertura di una grande nave, e supponete che vi siano mosche, farfalle e simili animaletti volanti; vi sia sospeso inoltre in alto un secchiello che versi a goccia a goccia dell’acqua in un vaso sottostante di angusta bocca. Fate muovere la nave con quanta si voglia velocità (purché il moto sia uniforme e non fluttuante di quà e di là), allora le goccioline cadranno come prima nel vaso inferiore, le farfalle e le mosche continueranno il loro volo indifferentemente verso tutte le parti...”

Ci limitiamo poi a ricordare che a lui é dovuta la prima formulazione del

principio di inerzia e, tra l'altro, la *legge di caduta dei gravi nel vuoto*. Infatti nei suoi *Discorsi*, Galileo descrive con minuzia uno degli esperimenti che progettò e che gli permise di affrontare il problema della caduta dei pesi a partire dallo studio di un moto su di piano inclinato. A conclusione dell'esperimento, Galileo afferma che lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo. Attualmente tale proporzione si presenta nel modo seguente: $s = \frac{1}{2}gt^2$, dove g è la costante di gravitazione, il cui valore sul livello del mare è 9.81 m/s^2 .

Terminiamo osservando che *il principio di relatività di Galilei è un principio di invarianza delle leggi del moto rispetto a due osservatori in moto traslatorio uniforme dell'uno rispetto all'altro*. Per essere sicuri che sia rispettato occorre e basta che le leggi abbiano la stessa forma matematica quando si passa da un riferimento all'altro tramite le trasformazioni di Galilei. Si dice che devono essere "*Galilei invarianti*".

6 Isacco Newton (1642-1727): la Meccanica Classica

Newton è il fondatore della Meccanica Classica come modello ipotetico-deduttivo per la descrizione del moto e delle sue leggi. Per tale motivo l'equazione del moto di un punto P di massa m , rispetto a un riferimento solare (inerziale)

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (6.1)$$

prende il nome di *equazione della meccanica di Newton*. In essa compaiono: m , costante positiva dipendente dalla qualità e quantità della materia contenuta in P ma non dalla sua velocità detta *massa inerziale*; $\mathbf{a}$, accelerazione di P nel riferimento inerziale; $\mathbf{F}$, forza che il mondo esterno a P esercita su P.

Essa è ottenuta nei *Principia* partendo dalle seguenti tre leggi:

- 1) *In assenza di forza, ogni corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto uniforme (Principio di inerzia);*
- 2) *In presenza di forze, l'accelerazione è proporzionale alla forza e si esercita lungo la direzione di questa;*
- 3) *Le azioni che si scambiano due corpi sono uguali e contrarie (Principio di Azione e Reazione).*

Servendosi poi della terza legge di Keplero riuscì a determinare che: il Sole S esercita su ogni pianeta P la forza attrattiva da P verso S di grandezza $F = G \frac{m_g M}{r^2}$, con M massa del Sole, G costante universale e m_g costante

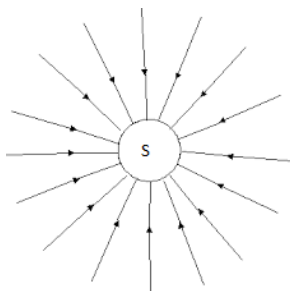


Figure 6: Campo gravitazionale del Sole

detta *massa gravitazionale di P*. Ammesso che $m_g = m$ (esperienza di Eotvos), egli poi generalizzò la legge come segue:

“Due corpi qualsiasi si attraggono con una forza che è proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra loro”.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (6.2)$$

Osservazione 1: la (6.1), essendo la distanza r invariante (in Meccanica Classica) quando si passa da un riferimento ad un altro in moto traslatorio uniforme (come del resto la sua direzione ed il verso) è invariante.

Osservazione 2: La (6.1), con $\mathbf{F}$ forza di gravità, essendo $\mathbf{a}$ invariante nel passaggio da un riferimento ad un altro in moto traslatorio uniforme, è essa stessa invariante in forma.

Osservazione 3: La (6.1), quando $\mathbf{F}$ è assegnata dà l’accelerazione del punto P in moto, ma per poter determinare come variano le sue coordinate nel tempo (e quindi la traiettoria e tutti gli altri elementi) occorre ... conoscere un bel pò di Analisi Matematica. Ma questo Newton lo sapeva fare giacchè (insieme a Leibnitz) introdusse il Calcolo Differenziale ed Integrale.

Osservazione 4: Da (6.1), segue $\mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} = 0$: l’accelerazione nulla equivale a forza nulla.

Osservazione 5: Aristotele riteneva (errando) che la legge del moto fosse

$$m\mathbf{v} = \mathbf{F}$$

e quindi che in assenza di forza ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) non fosse possibile il moto ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), in contrasto col principio di inerzia. Tutti verifichiamo che se smettiamo di pedalare ... la bicicletta – per inerzia – continua a muoversi per un pò!

Osservazione 6 (Azione a distanza immediata) É da tener presente che l’azione esercitata dal campo gravitazionale é immediata a qualunque distanza. In altri termini, una particella materiale (particella di prova) che entra nel campo gravitazionale di un corpo, immediatamente risente della sua attrazione. Si presuppone che tutto avviene come se *la velocità di*

propagazione dell'azione del corpo fosse infinita.

Osservazione 7 La leggenda della mela

Newton – soprattutto negli ultimi anni della sua vita – aveva la tendenza a mettere in evidenza il suo lato di genio visionario rispetto a quello più prosaico di lavoratore instancabile. È in tal senso che va vista la storia della caduta della mela che – come l'eureka di Archimede – ha avuto indubbio ruolo propagandistico. Newton lo raccontava – verso i 70 anni – ai suoi visitatori. William Stakely nel 1752 scrisse un libro biografico intitolato “Life of Newton” e per questo spesso andava in visita da Newton. Ecco come racconta la leggenda della mela: “Dopo pranzo andai in giardino a prendere il tè con Sir Isaac all'ombra di alcuni meli. Mi disse che la nozione di gravitazione gli era venuta in mente in una situazione uguale a quella in cui ci trovavamo. Venne suggerita dalla caduta di una mela mentre era seduto. Perché la mela cade sempre perpendicolarmente al terreno? Si chiese. Perché non cade verso un altro lato o verso l'alto? Sicuramente la ragione è che la Terra la attira. Ci deve essere una potenza di attrazione nella materia della Terra...”.

7 Albert Einstein (1879-1955): la relatività ristretta

La conoscenza scientifica all'inizio del XX secolo si era arricchita notevolmente per l'avvento di nuove teorie e delle loro applicazioni: 1) Elettromagnetismo (Faraday, Maxwell, Hertz,...); 2) Meccanica Quantistica (Planck, Schroedinger, Heisenberg, Born, Dirac,...).

La prima portò, attraverso le sue applicazioni (radio, illuminazione, ...) ad un enorme miglioramento della vita e delle relazioni sociali ed industriali. La seconda aprì la strada alla conoscenza del mondo subatomico ed i suoi benefici vanno aumentando di giorno in giorno (elettronica ed applicazioni).

7.1 Difficoltà della Fisica Classica

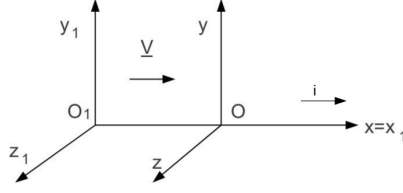
Dalle equazioni dell'elettromagnetismo (Maxwell) si deduce che esiste almeno un riferimento in cui la luce (nel vuoto) si propaga in tutte le direzioni con la stessa velocità (che indicheremo con c). Un tale riferimento si chiama *riferimento otticamente isotropo*.

Nella meccanica di Newton, si vede subito che può esistere un *unico riferimento otticamente isotropo*. Infatti, se consideriamo i due riferimenti $O_1x_1y_1z_1$ ed $Oxyz$ in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro sappiamo che la relazione tra le velocità è

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{V} + \mathbf{v}_r.$$

Se le velocità hanno tutte la direzione dell'asse x , detto $\mathbf{i}$ il versore dell'asse x , si ha

$$v_a \mathbf{i} = V \mathbf{i} + v_r \mathbf{i}.$$

Figure 7: Moto relativo traslatorio uniforme visto da O_1

Allora proviamo che se si suppone $Oxyz$ otticamente isotropo, non lo è $O_1x_1y_1z_1$. Rifacciamoci alla natura corpuscolare della luce e consideriamo un fotone che si muove nella direzione e verso dell'asse x . Allora si ha

$$v_r \mathbf{i} = c \mathbf{i}, \quad v_a \mathbf{i} = V \mathbf{i} + c \mathbf{i}, \quad |v_a| = |c + V|.$$

Nella direzione di verso opposto si ha

$$v_r \mathbf{i} = -c \mathbf{i}, \quad v_a \mathbf{i} = V \mathbf{i} - c \mathbf{i}, \quad |v_a| = |V - c|.$$

Ovviamente i fisici prerelativistici ritenevano che il riferimento *otticamente isotropo*, previsto dall'elettromagnetismo, vista la sua unicità non poteva essere che il riferimento Principe della Meccanica, cioè quello con l'origine nel Sole e gli assi orientati verso le stelle fisse. Ma diverse esperienze non riuscirono a dimostrare che la Terra non fosse un riferimento otticamente isotropo e si era dunque portati ad ammettere che la Terra potesse essere l'unico riferimento otticamente isotropo esistente. Tale scelta però suscitava perplessità, giacché la Terra ritornava ad essere un riferimento privilegiato nell'universo (una specie di ritorno al geocentrismo). Osserviamo subito che se si vuole rinunciare a tale privilegio e si vuole che se uno spazio è otticamente isotropo lo è anche ogni spazio in moto traslatorio uniforme, allora ne segue che – almeno per i fenomeni ottici – occorre rinunciare alle trasformazioni di Galilei.

Per non rinunciare a tali trasformazioni e per creare una teoria unificante la meccanica e l'elettromagnetismo, furono effettuati diversi esperimenti. In particolare con esperienze ottiche eseguite in un laboratorio terrestre, dovrebbe essere possibile far risultare che la Terra non è un riferimento otticamente isotropo. Come già detto, ogni esperimento (ad esempio l'esperienza di Michelson) per mettere in evidenza la non isotropia dei riferimenti terrestri ha dato esito negativo. Quindi nella Meccanica di Newton non si possono inglobare i fenomeni elettromagnetici! Allora se vogliamo costruire la teoria che inglobi la Meccanica Newtoniana e l'elettromagnetismo occorre abbandonare lo schema della meccanica newtoniana e crearne uno nuovo in cui vi siano infiniti sistemi otticamente isotropi – in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro – rinunciando quindi alle trasformazioni di Galilei. Occorre quindi fissare i cardini di una nuova scienza che superi le incompatibilità tra meccanica newtoniana ed elettromagnetismo.

Nel 1905, sulla prestigiosa rivista scientifica tedesca “Annali di Fisica” apparve un lavoro di 31 pagine, “Sull’elettrodinamica dei corpi in movimento”, di uno sconosciuto impiegato di 26 anni dell’Ufficio Brevetti di Zurigo, Albert Einstein, che suggeriva come superare le contraddizioni.

Assioma 1: *Esiste almeno uno spazio otticamente isotropo.*

Assioma 2: *Se e solo se uno spazio è in quiete o in moto traslatorio uniforme in uno spazio otticamente isotropo, nessuna esperienza fisica (meccanica, elettromagnetica,...) è capace di mettere in evidenza lo stato di quiete o di moto traslatorio uniforme di un riferimento rispetto all’altro (Principio di relatività ristretta).*

L’assioma 2 implica che se O è otticamente isotropo, anche O' – in moto traslatorio uniforme rispetto ad O – è otticamente isotropo. Infatti, se così non fosse, esisterebbe un fenomeno fisico (velocità della luce in O' non costante al variare della direzione) che metterebbe in evidenza il moto traslatorio uniforme di O' rispetto ad O.

7.2 Trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz sono il legame tra le coordinate spazio-tempo di un evento E individuato da (x, y, z, t) in O e da (x', y', z', t') in O' che prende il posto della trasformazione di Galilei (fig. 7)

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'.$$

Dal principio di relatività segue subito che la velocità della luce è la stessa rispetto ad O e rispetto ad O' . Questo implica $c^2 = \frac{\bar{OP}^2}{t^2} = \frac{\bar{O'}P^2}{t'^2}$ se pensiamo di far partire da P un raggio luminoso all’istante $t = t' = 0$, cioè $c^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2}$. Ne segue

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0.$$

Allora partendo da

$$x = ax' + by' + cz' + dt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta t',$$

con $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ costanti da determinare, sfruttando la costanza della velocità della luce si trova

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

che costituiscono le *trasformazioni (di Lorentz) della relatività ristretta*.

7.3 Conseguenza delle trasformazioni di Lorentz

1) **Contrazione delle lunghezze** (nella direzione del moto)

La lunghezza l' dei segmenti di $O'x'y'z'$ ortogonali alla direzione del moto non varia e si ha $l = l'$, con l lunghezza misurata in $Oxyz$.

La lunghezza dei segmenti di $O'x'y'z'$ paralleli al moto, misurata in $Oxyz$, risulta essere

$$l = l' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < l'$$

2) **Dilatazione dei tempi**

Consideriamo un fenomeno avvenuto in un punto A dell'asse x' di ascissa x'_A , che é durato un intervallo di tempo τ' , iniziando nell'istante t'_1 e finendo nell'istante t'_2

$$\tau' = t'_2 - t'_1, \quad A = (x'_A, 0, 0).$$

Vediamo quando é iniziato per O e quando é finito. Da $t_1 = \frac{t'_1 + \frac{c}{V^2}x'_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$,

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{c}{V^2}x'_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \text{ segue } \tau = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \text{ cioè}$$

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > \tau' \quad \text{Dilatazione dei tempi}$$

3) **Paradosso dei gemelli: Il tempo scorre piú lentamente per il gemello in moto.**

Se per l'osservatore O é passato il periodo $\tau = 50$ anni, per l'osservatore O' é passato il periodo di $\tau' = \tau \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \simeq 50 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}\right)$ anni. Ad esempio, per $V = \frac{1}{2}c = 150000 \text{ km/s}$, si ha $\tau' \simeq 50 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{4}\right) \simeq 50 \left(1 - \frac{1}{8}\right) \simeq 50 \frac{7}{8}$ anni $\simeq 43.75$ anni. Se O ed O' sono due gemelli, per O' il tempo scorre piú lentamente e ... invecchia meno di O.

4) **Relatività della contemporaneità ed inversione dell'ordine degli eventi**

Siano E_A ed E_B due eventi che si verificano in $O'x'y'z'$ rispettivamente in (x'_A, t'_A) ed (x'_B, t'_B) con $t'_B \geq t'_A$. Allora in $Oxyz$ si verificano negli istanti $t_A = \frac{t'_A + (V/c^2)x'_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ e $t_B = \frac{t'_B + (V/c^2)x'_B}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ ne segue

$$t_B - t_A = \frac{t'_B - t'_A + (V/c^2)(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Segue che due eventi contemporanei in O' ($t'_A = t'_B$), sono contemporanei anche in O se $x'_A = x'_B$, cioè solo se avvengono nello stesso posto.

Si può avere l'inversione dell'ordine degli eventi? Sì! Ciò avviene per eventi non legati da causa ed effetto solo se $t'_B - t'_A < \text{tempo impiegato dalla luce, nel vuoto, per andare da A a B.}$

7.4 Legge di composizione delle velocità

Al posto della legge $v = V + v'$ della Meccanica Classica, in Meccanica della relatività ristretta si trova

$$v = \frac{V + v'}{1 + \frac{V}{c^2}v'}.$$

Mettiamo subito in evidenza la enorme differenza tra le due leggi. In Meccanica Classica non vi è limite per la velocità composta v . In particolare v può superare la velocità della luce. Infatti si ha

$$\left(V = \frac{3}{4}c, v' = \frac{3}{4}c \right) \Rightarrow v = \frac{3}{2}c > c.$$

Nella meccanica della relatività ristretta non si hanno (per fenomeni legati da causa ed effetto) velocità superiori a quella della luce². Infatti anche per $V = v' = c$ si ha

$$v = \frac{2c}{1 + c^2/c^2} = c.$$

7.5 Equazione del moto della relatività ristretta

L'equazione di Newton si può scrivere

$$\frac{\text{variazione di } m\mathbf{v}}{\text{nell'unità di tempo}} = \mathbf{F}. \quad (7.1)$$

² $P_1, P_2, \dots, P_n$ siano osservatori disposti sull'asse x . Se, per loro scelta, agli istanti $t_1 = 0$ e $t_n = \frac{P_1 P_n}{2c}$ ($n = 1, 2, \dots$), $P_1, P_2, \dots, P_n$, accendono un lume, la successione delle accensioni avviene con velocità $2c$.

Nella relatività ristretta si trova

$$\begin{cases} \frac{\text{variazione di } (m\mathbf{v})}{\text{nell'unità di tempo}} = \mathbf{F}, \\ \frac{\text{variazione di } (mc^2)}{\text{nell'unità di tempo}} = \text{potenza di } \mathbf{F} \end{cases} \quad (7.2)$$

ove $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$, con m_0 massa di riposo. La quantità

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

prende il nome di *energia relativistica* di un corpo di massa di riposo m_0 in moto con velocità V (in un riferimento inerziale). In una reazione in cui scompare la quantità $10^{-10}m_0$ della massa di riposo, avviene la (*enorme*) *variazione di energia*

$$\begin{aligned} \text{Variazione di energia} &= \frac{m_0(1 - 10^{-10})c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > \\ &> m_0(1 - 10^{-10})(310^5)^2 = 9m_0(10^{10} - 1). \end{aligned}$$

8 Relatività generale

La forza di gravitazione universale rientra tra le forze della relatività ristretta? Certamente no! E questo per due motivi:

- 1) $F = G \frac{mM}{r^2}$ è invariante solo se lo è r^2 , cioè rispetto a trasformazioni che conservano la distanza. Ma ciò non avviene nelle trasformazioni di Lorentz (contrazione di Lorentz);
- 2) La legge di gravitazione prevede azione a distanza ed immediata, azione cioè che si esercita con velocità infinita, il che è in contrasto con la legge di composizione delle velocità della relatività ristretta in cui non possono esistere velocità maggiori di quella della luce.

Si era caduti dalla padella nella brace: con la relatività ristretta si erano guadagnati i fenomeni elettromagnetici ma si era persa la Legge di Gravitazione Universale! Restava inoltre da togliere la restrizione che i due osservatori O ed O' fossero in moto traslatorio ed uniforme, consentendo anche il moto traslatorio accelerato (o ritardato).

Einstein impiegò 10 anni (dal 1905) e nel 1915 presentò la prima formulazione della *Relatività Generale*.

Egli si mosse per via geometrica. Occorre infatti ricordare che le trasformazioni di Lorentz

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

si possono interpretare come un cambiamento di coordinate in uno spazio a quattro dimensioni (spazio di Minkowski). In tale passaggio di coordinate si conserva la quantità $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ essendo, per la costanza della velocità della luce

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \quad (8.1)$$

Se poniamo

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict$$

con i unità immaginaria, allora abbiamo che nello spazio di Minkowski si conserva la distanza al quadrato

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad (8.2)$$

avendosi

$$l^2 = l'^2 \quad (8.3)$$

La (8.1) si può scrivere sinteticamente

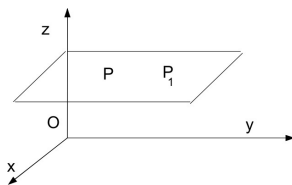
$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^2 \\ y'^2 \\ z'^2 \\ t'^2 \end{pmatrix}$$

ove si intende che va effettuato il prodotto di ogni riga della matrice

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$$

rispettivamente per gli elementi della colonna $\begin{pmatrix} x'^2 \\ y'^2 \\ z'^2 \\ t'^2 \end{pmatrix}$. Gli elementi della

matrice che vanno da 1 a 4 sono indicati con $g_{\alpha\beta}$ e la matrice dicesi *metrica* di Minkowski della relatività ristretta. Nello spazio di Minkowski le trasformazioni di Lorentz non coinvolgono le coordinate y e z .



Come avviene nello spazio tridimensionale, anche in uno a 4 dimensioni la parte di esso in cui variano solo 2 coordinate é un piano.

L'idea di fondo della relatività generale poggia su

- 1) se voglio rappresentare i fenomeni soggetti a forza gravitazionale o ad accelerazione relativa tra due osservatori, allora la trasformazione nello spazio-tempo non avverrà più su un piano ma su *superfici incurvate*: per effetto della gravità o accelerazione il piano di Minkowski della relatività ristretta si incurva.
 - 2) equivalenza tra accelerazione e gravità
- 1') Ma come fare incurvare lo spazio-tempo? E cosa é la curvatura per una superficie dello spazio-tempo? Einstein degli spazi a più di tre dimensioni ne sapeva poco! Questi spazi dai matematici erano ben conosciuti ed in particolare da Ricci-Curbastro e Levi-Civita (due famosi scienziati italiani) dei cui risultati A. Einstein si servì per la formalizzazione delle sue equazioni di campo della relatività generale. Per far incurvare lo spazio-tempo basta far variare la metrica introducendo un'arbitraria

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}$$

e poi esprimere in termini di $g_{\alpha\beta}$ la curvatura.

- 2') L'equivalenza tra accelerazione e gravitazione, nasce dal seguente esperimento mentale di Einstein: cosa prova una persona in caduta libera in un campo gravitazionale?

Ecco un'altra leggenda. Un imbianchino, caduto da un'alta scala, avrebbe detto ad Einstein (secondo il racconto di Einstein) che durante la caduta non sentiva il peso. Questo episodio avrebbe ispirato ad Einstein l'equivalenza tra accelerazione e gravitazione universale. Vediamo perché.

Con riferimento alla figura 7, se O si muove di moto accelerato rispetto ad O', detta $\mathbf{a}_\tau$ l'accelerazione di O rispetto a O', l'accelerazione di P rispetto a O' é

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_r.$$

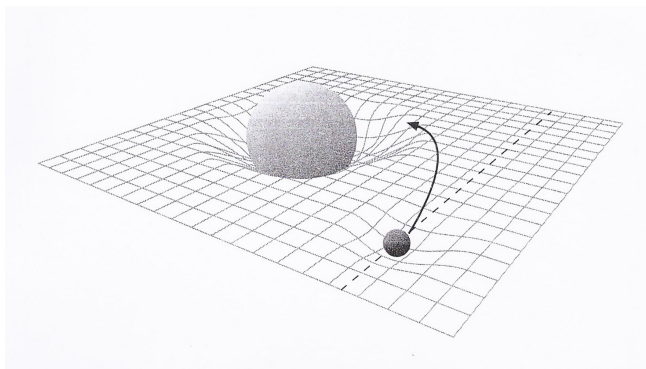


Figure 8: Moto sul piano deformato (incurvato) di Minkowski in Relativit  Generale

Allora da

$$m\mathbf{a}_a = \mathbf{F}$$

con $\mathbf{F}$ forza di gravitazione, segue

$$m\mathbf{a}_r + m\mathbf{a}_\tau = \mathbf{F}.$$

Se P   in quiete in $Oxyz$, $\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$ e quindi si ha

$$|a_\tau| = \frac{GM}{r^2} \Leftrightarrow |a_\tau| - \frac{GM}{r^2} = 0$$

cio  equivalenza tra accelerazione relativa tra due riferimenti e forza gravitazionale: Le deformazioni dello spazio-tempo dovute a moto accelerato sono dunque equivalenti alle deformazioni provocate dalla gravitazione.

Nella figura 8 si descrive il movimento ideale in un campo gravitazionale, secondo la Relativit  Generale. Si immagini il piano di Minkowski della Relativit  Ristretta come un piano teso, metallico, elastico e a maglie strette. Poggiando su tale piano due sfere pesanti, il piano si incurva nei punti di appoggio. Se una delle due sfere   molto pi  pesante dell'altra, la forza di gravit  fa si che la sfera meno pesante si muove verso quella pi  pesante. Questo movimento genera oscillazioni del piano elastico (*onde gravitazionali*)³. Riportiamo ora, *solo a titolo di completezza*, le equazioni che reggono la dinamica della Relativit  Generale (*Equazioni di campo*). Esse sono

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \beta = 1, 2, 3, 4, \quad (8.4)$$

³Ovviamente nella realt  non esiste alcun piano elastico. Ma tutto avviene come se esistesse!

$$\text{ove } R_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix}, \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix},$$

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} \text{ sono rispettivamente i tensori curvatura}$$

di Ricci, il tensore metrico ed il tensore energia-impulso, G =costante gravitazionale, Λ =costante cosmologica, c =velocità della luce, R =curvatura scalare ($\sum_{\alpha\beta}^{1,4} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$). Le (8.4) sono dunque 16 equazioni ove $R_{\alpha\beta}$ ed R

dipendono non linearmente da $g_{\alpha\beta}$ (e dalle sue derivate prime e seconde). Il sistema é iperbolico e quindi ammette soluzioni ondose.

- 1) La teoria prevede deviazione dei raggi luminosi in vicinanza di un corpo celeste. J.G. Solder (1776-1833) aveva, molto prima della teoria della R.G., dterminato la deviazione servendosi della teoria corpuscolare di Newton, trovando una deviazione di 0.84 secondi di arco. Nel 1915 Einstein, a partire dall'equazione di campo, aveva dedotto uno spostamento di 1.7 secondi d'arco. La verifica avvenne il 29 maggio del 1919 e la misura fu effettuata dalla spedizione scientifica organizzata dall'Università di Cambridge e dalla regia Società Astronomica inglese, spedizione diretta da A. Eddington direttore dell'Osservatorio di Cambridge durante un' eclissi solare, all'isola del Principe, davanti alla costa della Guinea. La previsione di Einstein risultó esatta.
- 2) Oscillazioni del perielio del pianeta Mercurio. Il perielio di Mercurio – attraverso osservazioni sperimentali – risulta avere delle oscillazioni inspiegabili con la teoria newtoniana della gravitazione. Attraverso le equazioni di campo, si trova la presenza di oscillazioni coincidenti con quelle misurate sperimentalmente.
- 3) Correzione della posizione calcolata dai GPS. I satelliti adoperati si muovono alla velocità 14000 km/h e quindi per R.S. si ha un ritardo di 6 microsecondi al giorno. Per effetto della R.G. si trova 45 microsecondi di anticipo. La correzione da effettuare é dunque di 39 microsecondi di anticipo al giorno.
- 4) Onde gravitazionali.
Lo scorso 11 Febbraio 2016, in una conferenza stampa congiunta da Washington e da Cascina (Pisa) è stato annunciato ufficialmente che i ricerctori del progetto U.S.A. LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) e del progetto VIRGO di eGO (European Gravitational Observatory) con interferometro realizzato a Cascina (nella

frazione Santo Stefano a Macerata) operanti rispettivamente dal 2002 e 2003, hanno comunicato che il 14 settembre 2015 alle ore 10.50 minuti 45 secondi (ora italiana) in un intervallo di tempo di una frazione di secondo (10 millesimi di secondo) hanno rilevato onde gravitazionali prodotte dalla fusione di due stelle di neutroni (buchi neri) di massa rispettivamente di 36 e 29 volte quella solare, producendo un buco nero di massa 62 volte quella solare e che nella fusione si è trasformata in energia la massa tripla di quella solare, energia che ha dato origine all'onda gravitazionale rilevata e che si è propagata con la velocità della luce (la massa del Sole è più grande di trecentomila volte quella della Terra). L'arrivo di una "seconda onda gravitazionale" è stata registrata da LIGO in USA il 26 dicembre 2015 (battezzata onda di Santo Stefano). Tale onda è nata dallo scontro di due buchi neri di massa 18 e 8 volte quella del Sole. Dalla fusione è nato un buco nero di massa pari a 21 Soli. La fusione è avvenuta 1,4 miliardi di anni fa. Durante la fusione è scomparsa la massa di un Sole e l'energia nata da questa scomparsa ha generato l'onda gravitazionale arrivata il 26 Dicembre scorso sulla Terra.

Bibliografia

- DOBBS, Betty J.T., *Isaac Newton scienziato e alchimista. Il doppio volto del genio*, Edizioni Mediterranee, 2002.
- DURAN Guardengo A.J., *La legge della gravitazione universale, nella serie RBA, I grandi della Scienza* (2012).
- GIUSTI, Enrico, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*, Ist. Editoriale e Poligrafici, 2007.
- GLEICK, James, *Isaac Newton*, Codice, 2004.
- MANUEL, Frank Edward, *A portrait of Isaac Newton*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1968.
- NEWTON, Isaac, *Opere: Vol. 1: i principi matematici della filosofia naturale*, UTET, 1997.
- NEWTON, Isaac, *Scritti sulla luce e i colori*, BUR Biblioteca Universale Rizzoli, 2006.
- ROSSI, P. *La rivoluzione scientifica: dal Rinascimento a Newton*, Vol. 1 di Storia della Scienza, UTET, 1988.
- WESTFALL, Richard S., *Newton*, Einaudi, 1989.
- BERGIA, S., *Einstein e la relatività*, Bari, Laterza, 1978.
- DAMOUR T., *Albert Einstein: la rivoluzione contemporanea*, Einaudi 2009.
- EINSTEIN A., *Autobiografia Scientifica*, Bollati 1979.
- EINSTEIN A., *Corrispondenza con Michele Besso (1903-1950)*. Guida, Napoli, 1995.
- EINSTEIN A., *Pensieri di un uomo curioso*, Milano, Mondadori, 1997.
- FERRIS, T. *L'avventura dell'universo*, Milano, Editrice Leonardo, 1991.

- GAMOW, G. *Biografia della fisica*, Milano, Mondadori, 1998.
- GRIBBIN, J. *L'avventura della Scienza Moderna*. Milano, Longanesi, 2003.
- HAWKING S., *Dal big bang ai buchi neri. Breve storia del tempo*. BUR-Rizzoli, Milano, 2000.
- HEIDEGGER, M., *Umanesimo e scienza nell'era atomica*, Brescia, La Scuola, 1984.
- HELGE KRAGH, *Quantum Generations: a history of physics in the twentieth century*, Princeton University Press, 1999.
- ISAACSON W., *Einstein. La sua vita, il suo universo*. Milano, Mondadori, 2010.
- KAKU, M. *Il cosmo di Einstein*, Torino, Codice Edizioni, 2005.
- LANDAU, L. RUMER, *Che cos'è la relatività?*. Roma, Editori Riuniti, 1983.
- PAIS, A., *Sottile è il Signore... la scienza e la vita di ALbert Einstein*, Torino, Bollati Boringhieri, 2012.
- PENROSE, R., AA.VV. *Equilibrio perfetto: le grandi equazioni della scienza moderna*, a cura e prefazione di Graham Farmelo, Milano, Il Saggiatore, 2005.
- ROSENBLUM B., KUTTNER S. *Quantum enigma*, Oxford University Press, 2008.
- SPARZANI, A. *Relatività, quante storie*, Torino, Bollati Boringhieri, 2003.
- BASSETT B., EDNEY R., *La relatività a fumetti*, Raffaello Cortina Editore 2008.
- SCHWARTZ J, McGUINNESS M., *Einstein*, Universale Economica Feltrinelli, 2009.

Finito di stampare
nel mese di dicembre 2016
presso le Officine grafiche Francesco Giannini e Figli S.p.A
www.gianninispaspa.it – www.gianninispaspa.com

